

## Lösungen zu den Übungen 1

1. Der Psychiater Ernst Kretschmer (1888 – 1964) formulierte<sup>1</sup> auf der Basis seiner Erfahrungen in der Klinik die Theorie, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Körperbau eines Patienten und der Art seiner psychischen Erkrankung einen Zusammenhang gebe. Demnach werden Pykneriker eher manisch-depressiv, Leptosome eher schizophren, Personen mit athletisch gebautem Körper leiden typischerweise an Epilepsie, und Atypische (Personen, die sich nicht eindeutig einem der Körperbautypen pyknisch, leptosom oder athletisch zuordnen lassen) verteilen sich zufällig auf die verschiedenen Krankheiten. Der Psychiater Westphal<sup>2</sup> sammelte darauf in Psychiatrischen Landeskrankenhäusern Daten, die in der Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1: Körperbau und psychische Erkrankung nach Kretschmer

Typ	man.dep.	Epilepsie	Schizophr.	$\Sigma$
pyknisch	879	83	717	1679
athletisch	91	435	884	1410
leptosom	261	378	2632	3271
dysplastisch	15	444	550	1009
atypisch	115	165	450	730
$\Sigma$	1361	1505	5233	8099

- (a) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Pyknerikers, als (a) manisch-depressiv, (b) schizophren, (c) epileptisch klassifiziert zu werden? Wie groß sind die analogen bedingten Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Körperbautypen?
- (b) Wie groß sind die prädiktiven Werte für die Vorhersage des Körperbaus auf der Basis ihrer Erkrankung?
- (c) Welche Werte haben die Sensitivitäten und Spezifitäten des Körperbaus für die drei Arten von Erkrankung?

Antworten: (a)

$$P(\text{md}|\text{pyk}) = \frac{879}{1679} = .523,$$

$$P(\text{Schiz}|\text{pyk}) = \frac{717}{1679} = .427,$$

$$P(\text{ep}|\text{pyk}) = \frac{83}{1679} = .049$$

- (b) Prädiktive Werte für die Vorhersage des Körperbaus: (c)

Tabelle 2: Prädiktive Werte für den Körperbau

Körperbau	$P(\text{Körperbau} \text{Erkrankung})$		
	man.-dep.	epileptisch	schizophren
pyknisch	879/1361 = .646	83/1505 = .055	717/5233 = .137
athletisch	91/1361 = .067	435/1505 = .289	884/5233 = .169
leptosom	261/1361 = .191	3788/1505 = .251	2632/5233 = .502
dysplastisch	15/1361 = .011	444/1505 = .295	550/5233 = .105
atypisch	115/1361 = .084	165/1505 = .110	450/5233 = .086

Tabelle 3: Sensitivitäten

Körperbau	$P(\text{Erkrankung} \text{Körperbau})$		
	man.-dep.	epileptisch	schizophren
pyknisch	879/1679 = .523	83/1679 = .099	717/1679 = .427
athletisch	91/1410 = .064	435/1410 = .308	884/1410 = .627
leptosom	261/3271 = .080	378/3271 = .115	2632/3271 = .805
dysplastisch	15/1009 = .015	444/1009 = .440	550/1009 = .525
atypisch	115/730 = .157	165/730 = .226	450/730 = .723

**Spezifitäten:** Dies sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(\neg\text{Erkrank}|\neg\text{Körperbau}),$$

d.h.

$$p(\neg\text{man-dep}|\neg\text{pykn}), p(\neg\text{man-dep}|\neg\text{athlet}), \text{etc}$$

Es genügt, zwei Beispiele vorzuführen:

$\neg$  man-dep bedeutet epileptisch oder schizophren,  $\neg$  pyknisch bedeutet athletisch oder leptosom oder dysplastisch oder atypisch. Dementsprechend ist

$$P(\neg\text{man-dep}|\neg\text{pykn}) = \frac{P(\neg\text{man-dep} \cap \neg\text{pykn})}{p(\neg\text{pykn})}$$

d.h.

$$P(\neg\text{man-dep}|\neg\text{pykn}) = \frac{P((\text{schiz oder epil}) \cap (\text{athl} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp}))}{P(\text{athl} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp})}$$

Die Anzahl der Fälle  $(\text{schiz oder epil}) \cap (\text{athl} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp})$  ist gleich der Anzahl der Fälle, die nicht pyknisch und nicht man.-dep. sind, d.h.

$$435 + 884 + 378 + \dots + 165 + 450 = 1505 - 83 + 5233 - 717 = 5938,$$

<sup>1</sup>Kretschmer, E.: Körperbau und Charakter, Berlin 1921

<sup>2</sup>Westphal, K. (1931) Körperbau und Charakter des Epileptikers. *Nervenarzt*, 4

und die Anzahl der Fälle  $\text{athl} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp}$  ist

$$1410 + \dots + 730 = 8099 - 1679 = 6420.$$

Demnach findet man

$$P(\neg \text{man-dep} | \neg \text{pykn}) = \frac{5938}{6420} = .925.$$

Analog dazu findet man

$$P(\neg \text{man-dep} | \neg \text{athlet}) = \frac{P(\text{epil} \cup \text{schiz} \cap \text{pykn} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp})}{P(\text{pykn} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp})}$$

Die Anzahl der Fälle  $\text{epil} \cup \text{schiz} \cap \text{pykn} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp}$  ist gleich  $1505 - 435 + 5233 - 844 = 5419$  und die Anzahl der Fälle  $\text{pykn} \cup \text{lept} \cup \text{dyspl} \cup \text{atyp}$  ist gleich  $8099 - 1679 = 6689$  so dass

$$P(\neg \text{man-dep} | \neg \text{athlet}) = \frac{5419}{6689} = .810.$$

Die restlichen Spezifitäten findet man auf analoge Weise.

2. Es wird eine Röntgen-Reihenuntersuchung zur TBC durchgeführt. Aus vorangegangenen Untersuchungen ist bekannt:
  1. 90% der TBC-Kranken werden durch die Reihenuntersuchung entdeckt.
  2. 99% der TBC-Freien (nicht an TBC erkrankten) werden als TBC-frei eingestuft.
  3. .1% (Anteil an der Bevölkerung = .001) der Bevölkerung haben TBC.

$A$  sei das Ereignis, dass eine zufällig gewählte Person aus der Bevölkerung an TBC erkrankt ist.  $B$  sei das zufällige Ereignis, dass die Röntgenuntersuchung eine Person als "TBC-verdächtig" einstuft (der Röntgendiagnose nach hat sie TBC, zur endgültigen Klärung der Diagnose wird sie zu einer Nachuntersuchung eingeladen).

Welchen Wert hat  $P(A|B)$ , d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine als TBC-verdächtig eingestufte Person tatsächlich TBC-krank?

**Lösung:** Gegeben sind

(a)  $P(A) = .001$

(b)  $P(\neg B | \neg A) = .99$ ,  $P(B | \neg A) = .01$ , denn  $P(B | \neg A) + P(\neg B | \neg A) = 1$  (!)

(c)  $P(B | A) = .90$ .

Gesucht ist  $P(A|B)$ . Es ist

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)} \\ &= \frac{.9 \times .001}{.0 \times .001 + .01 \times .99} = .083. \end{aligned}$$

(Hier ist der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit angewendet worden, um  $P(B)$  zu berechnen!)

Das Ergebnis ist vielleicht überraschend: zwar ist der Röntgen-Test sehr zuverlässig, da 90% der tatsächlich TBC-Kranken gefunden werden und 99% der Gesunden als gesund klassifiziert werden, doch haben nur 8% der Personen mit positivem Befund tatsächlich auch TBC. Der Vorteil der Reihenuntersuchung liegt darin, dass eine gründliche und teure Detailuntersuchung nur auf einen kleinen Teil der Bevölkerung angewendet werden muß. Eine analoge Situation hat man, wenn man Unfall- oder Schlaganfallopfer mit psychologischen Tests auf Hirnschäden untersucht: eine genaue medizinische Untersuchung ist aufwändig, aber sie muß nur auf einen kleinen Teil der Unfall- oder Schlaganfallopfer angewendet werden.