Verteilte Schulnoten sind normal – aber nicht notwendig normalverteilt

U. Mortensen,

01. 07. 2016

überarbeitete Version: 07. 08. 2017

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung: Schulnoten werden in einigen Bundesländern nicht nach Maßgabe von festgelegten Kriterien, sondern nach Maßgabe der Repräsentation einer Leistung auf einer Normal- oder Gauß-verteilten Skala vergeben. Dabei werden die Parameter der Verteilung (ihr Erwartungswert μ und ihre Varianz σ^2) so aus den Punktwerten, wie sie etwa auf der Basis einer Klassenarbeit von den Schülerinnen und Schülern erworben wurden, bestimmt, dass die mittlere Note in der Nachbarschaft einer "3" ("befriedigend") liegt, und Einsen und Fünfen bzw. Sechsen einem bestimmten Prozentsatz entsprechen. Es wird eine Reihe von Gründen aufgeführt, die die Benotung nach diesem Schema als unsinnig erscheinen lassen. Zum einen ist keineswegs klar, dass die Normalverteilung das Leistungsspektrum beschreibt, andere Verteilungen wie die log-Normalverteilung, die logistische oder die Weibull-Verteilung sind plausiblere Alternativen, zumal es bei der Anwendung der Normalverteilung zu einer Konfundierung der Einschätzung der Schwierigkeit von Aufgaben in einer Arbeit und der Leistung der Schüler kommt. Es werden alternative Modelle zur Benotung aufgezeigt.

1 Leistungen, Verteilungen und Kriterien

Die Bewertung schulischer Leistungen kann für Schülerinnen und Schüler Rückmeldung über den Leistungsstand, aber auch Selektion bedeuten. Als Rückmeldung sollte sich die Bewertung an als allgemeingültig definierten Kriterien orientieren, und dementsprechend hat bereits 1968 die Kultusministerkonferenz (KMK) eine kriterienbezogene Benotung von schulischen Leistungen vorgeschrieben. Gleichwohl wirkt insbesondere in Bayern noch die Idee fort, dass Schulleistungen Gauß-verteilt (normalverteilt) sind und die Noten deshalb ebenfalls Gauß-verteilt zu sein haben. Es wird vermutet (Behler (2010)), dass auf der Basis dieser Annahme die Selektion guter, für weiterführende Schulen geeignete Schülerinnen und Schüler erleichtert werden könne. Die Annahme der Gauß-Verteilung wird im Folgenden kritisch diskutiert.

Die erste Frage ist, wie diese Annahme überhaupt begründet werden kann. Die Gauß-Verteilung ist die Verteilung einer zufälligen Veränderlichen X, für die $-\infty < X < \infty$ gilt. Schulische Leistungen könnnen aber keine negativen Werte annehmen, und dementsprechend sind Schulnoten alle größer als Null. Es wird argumentiert, dass die mittlere Leistung im Vergleich zur Streuung der Messwerte groß ist, so dass negative Werte eine Wahrscheinlichkeit von praktisch Null haben, die Gauß-Verteilung also eine sehr gute Appoximation darstellen könne. Das Argument ist richtig, macht aber deutlich, dass die Annahme der Gauß-Verteilung eben nur eine Approximation ist. Probleme frü diese Approximation ergeben z.B. dann, wenn eine Klausur relativ zum Klassenstandard entweder schwierig oder leicht ist: im ersteren Fall ergibt sich eine Häufung der Punktwerte am unteren Ende der Punkteskala, im zweiten Fall ergibt sich eine Häufung am oberenEnde der Punkteskala. Da die Gauß-Verteilung symmetrisch in Bezug auf den Erwartungswert ist muß möglicherweise eine Varianz postuliert werden, die zu klein im

Vergleich mit der beobachteten Varianz der Punktewerte ist, und überdies wird der empirischen Schiefe der Verteilung nicht Rechung getragen. In Abschnitt 2.2 werden diese Aspekte der Gauß-Approximation näher erläutert.

Man kann natürlich argumentieren, dass letztlich jede Verteilung eine Approximation an die jeweils betrachteten realen Daten darstellt. Die zweite Frage ist nun, warum man gerade auf die Gauß-Verteilung als Approximation fokussiert. Dr Ausdruck 'Normalverteilung' für die Gauß-Verteilung geht auf den französischen Mathematiker und Astronomen Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796 – 1874) zurück, der auf der Basis von biologischen Messungen (z.B. der Brustumfänge französischer Rekruten) behauptete, die Gauß-Verteilung sei der Normalfall bei biologischen und sozialen Variablen, weshalb er eben den Ausdruck 'Normalverteilung' prägte. Spätere genauere Messungen zeigten aber, dass biologische Größen keineswegs normalerweise Gauß-verteilt sind; man kann argumentieren, dass die log-Normalverteilung hier die bessere Approximation ist (Aitchinson & Brown (1963), Koch (1966), Limpert, Stahel & Apt (2008), Limpert & Stahel (2011)). Diese ergibt sich, wenn eine Variable X gemessen wird und diese über die Exponentialfunktion mit einer Variablen Y verbunden ist, d.h. wenn $X = e^Y$ gilt, und dabei Y Gauß-verteilt ist; dies bedeutet, dass $\log_e X = Y$ normalverteilt ist. X ist dabei nur für positive Größen definiert. In Abschnitt 2.3 werden Begründungen für die Annahme dieser Verteilung aufgeführt. Dorfman (1978), p. 1180, zitiert Yule und Kendall (1937) – beide renommierte Statistiker – mit der Bemerkung: "The normal curve was, in fact, to the early stastisticians what the circle was to the Ptolemaic astronomers" (der Kreis galt als "perfekte" Figur, woraus man folgerte, dass Gott die Planetenbahnen als Kreisbahnen eingerichtet habe; Kepler hatte Mühe, sich auf der Basis seiner Analyse der Daten Tycho Brahes von dieser Vorstellung zu lösen). McNemar (1942) merkt an, dass "the ease with which the shape of a distribution can be altered by a change in test difficulty would also have served as a warning to those who were out to demonstrate the normal law for psychological traits" (zitiert nach Dorfman (1978), p. 1180).

Die Objektivität der Benotung ist ein wichtiges Desiderat. Nicht nur Pädagogen sind oft der Meinung, ihre Schülerinnen und Schüler 'ganzheitlich' beurteilen zu können; die Note soll dann eine solche ganzheitliche Beurteilung repräsentieren. Allerdings ist es bemerkenswert, in welchem Ausmaß sich die Beurteilungen derselben Leistungen von SchülerInnen durch verschiedene LehrerInnen voneinander unterscheiden können; ein und derselbe Schulaufsatz kann mit sämtlichen Schulnoten von "1" bis "6" beurteilt werden. Selbst wenn verschiedene Lehrer zum selben Urteil kommen ist damit noch nicht nachgewiesen, dass die Beurteilung vorurteilsfrei ist[1]. Eine Zusammenfassung der Psychologie der Urteilsfehler findet man in Tversky & Kahneman(1974) (dieser Artikel kann mit anderen hier erwähnten Arbeiten von der Seite http://www.uwe-mortensen.de/SkriptenStatistik.html heruntergeladen werden).

[1] http://www.presse.uni-oldenburg.de/mit/2010/319.html

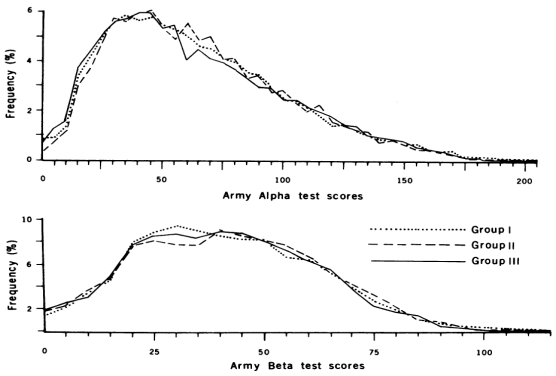
Schließlich gibt es noch die Frage nach der Skaleneigenschaft der Schulnoten. Von einem formalen Standpunkt aus gesehen sind Schulnoten Messungen. Der Begriff der Messung wird in der Statistik sehr allgemein gefaßt und wird in Zusammenhang mit dem der Skala definiert. Allgemein bedeutet Messen die Zuordnung von Zahlen zu Objekten. Man unterscheidet vier Haupttypen von Skalen, auch Messniveaus genannt:
(1) *Kategoriale Messung – die Kategorial- oder Nominalskala*, bei der ein Objekt nur kategorisiert und dementsprechend mit einem Namen versehen wird. Zahlen spielen hier nur die Rolle von Namen und reflektiern keine quantitativen Unterschiede zwischen den Kategorien (etwa: weiblich – männlich, blond – brünett, etc),
(2) *Ordinale Messungen – die Ordinalskala*, bei der Objekte bezüglich der Ausprägung eines Merkmals in eine Rangordnung gebracht werden. Die Zahlen repräsentieren nur die Position in der Rangreihe. Gleiche Differenzen zwischen Rangzahlen nicht auch gleiche Differenzen bezüglich der Ausprägungen des betrachteten Merkmals,
(3) *Intervallmessungen – die Intervallskala*, bei der die Maßeinheit sowie der Nullpunkt der Skala frei wählbar sind, und gleiche Differenzen der Skalenwerte bedeuten auch gleiche Differenzen der Merkmalsausprägungen (Beispiel: Temperaturskalen wie die Celsius- und die Fahrenheitskala);
(4) *Verhältnismessung – die Verhältnisskala*, bei der nur die Maßeinheit frei gewählt werden kann, der Nullpunkt liegt fest. Ein Beispiel ist die Kelvin-Skala, bei der der absolute Nullpunkt das absolute Nichtvorhandensein von Wärme repräsentiert: Da Wärme ein kinetisches Phänomen ist, repräsentiert der Nullpunkt den Fall, bei dem absolut keine Bewegung mehr existiert.

Es wird oft postuliert, dass die Annahme einer Gauß-Verteilung automatisch die Konstruktion einer Intervallskala impliziert. Dies ist nicht so, die Konstruktion einer Intervallskala beruht stets – d.h. auch bei anderen Verteilungen – auf zusätzlichen Annahmen.

Die Beantwortung von Fragen bzw. die Lösung von Aufgaben wird oft mit Punkten bewertet, und die Note wird aus der Summe aller Punkte bestimmt, wobei die Punktwerte für die verschiedenen Fragen noch gewichtet werden können. Die Gewichtung soll die möglicherweise unterschiedlichen Schwierigkeiten der Fragen oder Aufgaben widerspiegeln. Die Frage ist nun, wie der Begriff der Schwierigkeit so definiert werden kann, dass qunatifiziert in die Bewertung durch Punkte eingehen kann. Die Schwierigkeit wird in der (statistischen) Theorie der psychologischen Tests[2], durch den Anteil π_j der Personen, die die Frage beantworten bzw. die Aufgabe lösen können definiert: Je mehr Personen eine Aufgabe lösen bzw. ein Frage beantworten können, desto leichter ist die Aufgabe, und je weniger Personen die Aufgabe lösen können, desto schwieriger ist sie. Auf eine analoge Definition von 'Schwierigkeit' wird i. a. bei der Bewertung schulischer Leistungen zurückgegriffen. Diese Definition führt aber in Probleme, wenn es um

[2]Gemeint ist die Klassische Testtheorie (KKT)

Abbildung 1: Army Alpha Scores (nach Dorfman 1978)



den Vergleich verschiedener Populationen geht. Im schulischen Bereich ergeben sich bereits Probleme, wenn verschiedene Klassen vergleichbar gemacht werden sollen; wie sich zeigt, kann es zu systematischen Über-, aber auch Unterbewertungen kommen. In der diagnostischen Psychologie hat man nach Alternativen für die Definition des Schwierigkeitsbegriffs gesucht. Es läßt sich zeigen, dass die Schwierigkeit in einem bestimmten Sinn unabhängig von der Population durch einen PAramerter ausgedrückt werden kann, wenn man *nicht* von der Gauß-Verteilungen der Leistungen ausgeht, sondern statt dessen die logistische Verteilung annimmt. Die auf der Annahme der logiswtischen Verteilung basierende Theorie psychometrischer Tests (eine Klassenarbeit kann als ein solcher Test angesehenwerden), die sogenannte *probabilistische Testtheorie* vermeidet die mit dem Parameter π_j verbundene Zirkularität der Gewichtung. Die probabilistische Testtheorie wird in den PISA-Studien angewandt, wo es ja um den Vergleich verschiedener Länder geht. In Abschnitt 3 wird diese Theorie kurz vorgestellt.

2 Die klassischen Modelle

2.1 Repräsentation von Merkmalsausprägungen

Das Ausmaß der Kompetenz in einem bestimmten Fach kann von Person zu Person variieren. Die Benotung der Kompetenz bedeutet, das jeweilige Ausmaß von Kompetenz auf einer Skala zu repräsentieren. Die so vertraute Notenskala suggeriert, dass Kompetenz auf einer einzelnen Skala abgebildet werden kann. Tatsächlich ist Kompetenz im Allgemeinen ein mehrdimensionales Merkmal. Im Fach Geschichte kann man etwa annehmen, dass (i) historisches Faktenwissen und (ii) die Fähigkeit, historische Entwicklungen zu interpretieren zwei verschiedene Dimensionen sind; vermutlich sind weitere Dimensionen denkbar. In der Mathe-

matik können reines Faktenwissen (Lehrsätze und Formeln) und die Fähigkeit, Probleme zu lösen (Beweise zu finden) ebenfalls zwei verschiedene Dimensionen sein. Analog kann man in anderen Fächer argumentieren. Kompetenz setzt sich dann aus den Ausprägungen auf diesen, im allgemeinen Fall $r \geq 1$ Dimensionen zusammen, im einfachsten Fall additiv:

$$X = a_1 D_1 + a_2 D_2 + \cdots + a_r D_r \tag{2.1}$$

wobei die a_j, $j = 1, \ldots, r$ Gewichte repräsentieren, mit denen die Kompetenzdimensionen in das Maß X eingehen. Nun kann man in der Mathematik bei aller Kreativität keine Probleme lösen, wenn man kein entsprechendes Grundwissen hat; dieser Sachverhalt kann bedeuten, dass ein linearer Ansatz wie (2.1) inadäquat ist; eine bessere Repräsentation kann durch

$$X = a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_1 D_2 \tag{2.2}$$

gegeben sein, wobei der Einfachheit halber $r = 2$ angenommen wurde. Das Produkt $D_1 D_2$ repräsentiert den Fall, dass die Kompetenz durch eine "Interaktion" der beiden Dimensionen mitdefiniert wird: D_2 geht proportional zu D_1 in die Kompetenz ein, oder D_1 proportional zu D_2. In welcher Form für einen gegebenen Beurteiler Kompetenz durch die Dimensionen definiert wird ist nicht bekannt, so dass man auch einfach

$$X = f(D_1, \ldots, D_r) \tag{2.3}$$

schreiben kann; f ist hier eine unbekannte Funktion der r Dimensionen, wobei auch nicht bekannt ist, wieviele Dimensionen in ein Urteil eingehen. Hinzu kommt, dass auch nicht kompetenzbezogene Größen in das Urteil eingehen. Die Leistungen von Schülern und Schülerinnen können auf Grund solcher Faktoren von einer Stunde zur nächsten, also auch von einer Klassenarbeit zur nächsten schwanken. Diese Faktoren sind im Einzelnen nicht notwendig bekannt und in diesem Sinne zufällig. Aber auch die Lehrerin oder der Lehrer sind keine konstant und deterministisch funktionierenden Automaten. Deswegen wird man in den Ausdrücken für X einen Fehlerterm e (von englisch *error*) hinzufügen müssen:

$$X = f(D_1, \ldots, D_r) + e. \tag{2.4}$$

e bildet alle nicht sytematischen Effekte in X ab, weshalb X eine zufällige Veränderliche Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Statistik ist Man kann die Funktion f als die Beurteilungsregel auffassen, die den Urteilen einer Lehrerin oder eines Lehrers zugrunde liegt; f repräsentiert den systematischen Aspekt der Leistungsbeurteilung. Man muß hier hinzufügen, dass die Konzeption der Beurteilungsregel eigentlich noch in Rechnung stellen muß, dass auch die Anzahl der jeweils berücksichtigten Dimensionen, die Abschätzung ihres jeweiligen Wertes und ihre Gewichtung letztlich zufällige ("stochastische") Prozesse sind. Die Repräsentation (2.4) stellt dementsprechend eine Vereinfachung dar,

$f(D_1, \ldots, D_r)$ bildet nur ab, wie die Beurteilung gewissermaßen im Mittel verläuft. Empirisch zeigt sich oft, dass der Ansatz (2.1), erweitert um den Term e, eine gute Näherung darstellt.

X kann im Prinzip als eine stetige zufällige Veränderliche betrachtet werden, d.h. sie ist auf einem Intervall von rellen Zahlen definiert. Für den Fall, dass X als Gauß-verteilt angenommen wird ist das Intervall $(-\infty, +\infty)$, für den Fall, das eine log-normale Verteilung angenommen wird, ist das Intervall $[0, \infty)$.

X ist nicht direkt beobachtbar, der Wert für eine(n) Probandin/en muß erschlossen werden. Es werden – z.B. in einer Klassenarbeit – n Aufgaben bzw. Fragen gestellt, und für die Antworten werden Punkte vergeben, für die Frage 1 die Punktzahl X_1, für die Frage 2 X_2, etc. Die Gesamtzahl der Punkte ist die Summe $S = X_1 + \cdots + X_n$. Man kann annehmen, dass S von X abhängt, so dass man $S(X)$ schreiben kann. Natürlich ergibt sich sofort die Frage, wie die X_j definiert werden, d.h. wieviele Punkte für die Antworten auf die j-te Frage vergeben werden sollen. Es genügt, für die Zwecke dieses Aufsatzes den einfachen binären Fall anzunehmen, bei dem eine Anwort oder Aufgabenlösung entweder richtig oder falsch ist. Man kann dann eine Indikatorvariable

$$\chi_j = \begin{cases} 0, & \text{Frage nicht oder falsch beantwortet} \\ 1, & \text{Frage korrekt beantwortet} \end{cases} \tag{2.5}$$

einführen. Es bleibt dann noch die Frage, ob alle Fragen gleich gewichtet werden sollen oder können, oder ob im Falle unterschiedlich schwieriger Fragen eine Gewichtung vorgenommen werden soll, so dass $X_j = b_j \chi_j$. b_j ist das Gewicht für die j-te Frage. Dann ergibt sich das Problem, die b_j zu bestimmen. Im einfachsten Fall *setzt* man $b_j = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und nimmt damit an, dass alle Fragenb oder Aufgaben dieselbe Schwierigkeit haben. Eine zweite Möglichkeit ist, $b_j = 1/\pi_j$ zu setzen, wobei π_j die Schwierigkeit der j-ten Frage ist. Dabei ist π_j gleich dem Anteil von Personen in der Stichprobe (etwa der Schüler in einer Klasse), die die j-te Frage korrekt beantwortet haben. Je größer der Wert von π_j, desto weniger geht die j-te Frage in den Gesamt-Score S ein. Besser wäre eine empirische Bestimmung der b_j als Regressionskoeffizienten in dem Ansatz

$$S = b_1 \chi_1 + \cdots + b_b \chi_n + e \tag{2.6}$$

nur benötigt man dafür eine von den speziellen Aufgaben unabhängige Schätzung für S, – und die ist nicht gegeben, wenn man nicht einfach ein globales Rating für S, wie ein Lehrender sie für einen Schüler abgeben könnte, für diese Schätzung annmehmen will. Der Nachteil eines solchen Vorgehens liegt wegen der in der Einleitung genannten Nachteile auf der Hand. Man ist gezwungen, jeweils eine ad hoc-Setzung für die b_j zu wählen.

Es sei S_i der Gesamt-Score für Pb_i. S_i ist eine Schätzung für X_i, der Kompetenz von Pb_i. Von S_i muß auf die Note N_i für Pb_i geschlossen werden. Nun ist aber nach den obigen Ausführungen X_i eine zufällige Veränderliche, so dass man

davon ausgehen kann, dass auch der Punktwert S_i eine zufällige Veränderliche ist. Zufälligen Veränderlichen sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugeordnet, in deren Definition bestimmte Parameterwerte auftauchen. Zwéi wichtige Parameter sind der Erwartungswert $\mathbb{E}(X_i)$ bzw. $\mathbb{E}(S_i)$ und die Varianz $Var(X_i)$ bzw. $Var(S_i)$. Der Erwartungswert ist das arithmetische Mittel über *alle möglichen* Werte der zufälligen Veränderlichen, und die Varianz ist das arithmetische Mittel über alle möglichen Abweichungen $(X_i - \mathbb{E}(X_i))^2$ (analog für S_i). Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
1. Man definiert anhand gewisser Kriterien die Intervalle der Gesamt-Scores, die den Noten entsprechen. Ist der maximal erreichbare Punktwert $S = 50$, so könnte man festsetzen, dass allen Punktwerten zwischen 45 und 50 "1" zugeordnet wird, allen Punktwerten zwischen 38 und 44 eine "2", etc.
2. Man bestimmt die zu den Noten korrespondierenden Intervalle nach Maßgabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Beliebt ist hier die Gauß-Verteilung, – wohl aufgrund der Annahme, dass die Gauß-Verteilung, den Argumenten Quetelets folgend, als "natürliche" und daher "normale" Verteilung gilt.

Es muß eine Häufigkeitsverteilung für die S_i-Werte erstellt werden, an die die Verteilung einer stetigen zufälligen Veränderlichen angepasst werden kann (dies ist üblicherweise die Gauß-Verteilung). Die S_i sind selbst zufällig verteilt. (2.6) entsprechend könnte man für S_i ebenfalls eine stetige Veränderliche annehmen, sofern die b_j irgenwelche reellen Zahlen sein dürfen. Andererseits hat man kaum eine Möglichkeit, die b_j zu schätzen. Nimmt man vereinfachend an, dass $b_j = 1$ für alle j, so ist S_i diskret. Die Aufgaben können aber verschieden schwierig sein, so dass $P(\chi_{ij} = 1$ ($\chi_{ij} = \chi_j$ für den/die i-te SchülerIn) Kann man annehmen, dass die Aufgaben unabhängig voneinander beantwortet werden, so wäre die verallgemeinerte Binomialverteilung eine vernünftige Annahme für die Verteilungsfunktion $F_i(S)$. Es muß hier nicht explizit darauf eingegangen werden, die Bemerkung über F_i wird nur gemacht, um später die Plausibilität der Gauß-Approximation zu diskutieren.

Aus den S_i-Werten läßt sich eine Häufigkeitsverteilung der Punkte erstellen. Es ist oben gesagt worden, dass die individuellen Scores S_i selbst zufällig verteilt sind. Es sei $I_j = [g_j, g_j + \Delta g_j)$ ein Intervall dieser Häufigkeitsverteilung; für $\Delta g_j = \Delta g$ für für alle j sind die Intervalle für die Häufigkeitsverteilung gleich groß. Wenn S_i diskret ist, müssen die g_j- und Δg_j-Werte ebenfalls Werte aus dem Bereich der S_i-Werte sein. Dann ist

$$P(S_i \in I_j) = F_i(g_j + \Delta g) - F_i(g_j), \quad i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, k \tag{2.7}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Score der i-ten Person in die j-te Kategorie fällt. $F_i = F_i(s) = P_i(S \leq s)$ ist die Verteilungsfunktion für die Scores bei der i-ten Person. Dann ist

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} P(S_i \in I_j) = \sum_{i=1}^{N} (F_i(g_j + \Delta g) - F_i(g_j)) \tag{2.8}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt einer der Scores in das j-te Intervall fällt; $Np_j = \hat{n}_k$ ist dann die erwartete Häufigkeit von Scores in I_j, und $\sum_k n_k = N$. Jeder Score fällt mit Sicherheit in eines der Intervalle I_j, da ja $I_1 \cup \cdots \cup I_k$ die gesamte Notenskala abdecken. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{N} (F_i(g_j + \Delta g) - F_i(g_j)) = 1. \tag{2.9}$$

Sind die F_i Gauß-Verteilungen, so entspricht die Wahrscheinlichkeit p_j *nicht* den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten einer Gauß-Verteilung.Die p_j-Werte korrespondieren zu einer Verteilung, die im Vergleich zu einer Gauß-Verteilung im Allgemeinen eine größere Wölbung zeigt, d.h. sie ist nicht so "spitzgipfelig" wie eine Gauß-Verteilung. Will man für die Haufigkeitsverteilung der S_i-Werte eine Gauß-Verteilung annehmen, so müssen die F_i entsprechend anders definiert sein. Sie müssen im Vergleich zur durch die p_j definierten Verteilung sehr spitzgipfelig sein; möglicherweise können Gaußsche F_i-Verteilungen mit sehr kleinen Varianzen zu einer akzeptablen Gauß-Approximation für die p_j-Verteilung führen.

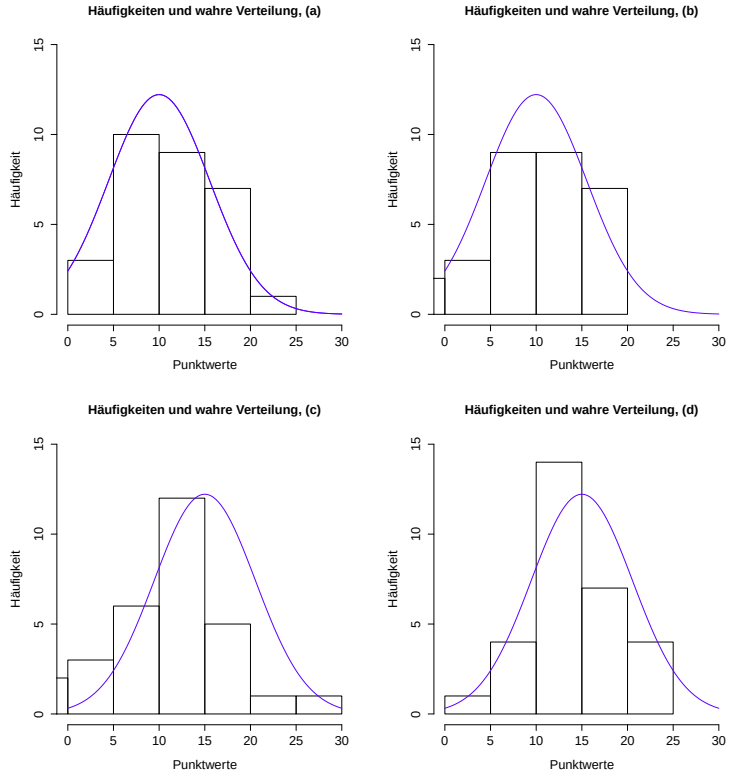
Entscheidet man sich für die Möglichkeit 2., so hat man die Frage nach den Intervallgrenzen für die Notenintervalle noch nicht beantwortet. Wie Thomas (1982) ausführt scheint sich die Auffassung festgesetzt zu haben, dass die Annahme einer Gauß-Verteilung eine Intervallskala für die Noten (bzw. für die von Thomas diskutierten Intelligenzquotienten) impliziere; dies ist die Annahme, dass die Gauß-Verteilung aus rein mathematischen Gründen stets eine Intervallskala für die jeweils gemessene Größe impliziere. Diese Annahme ist natürlich nicht gerechtfertigt. Die Annahme einer Gauß-Verteilung impliziert nur die Annahme, dass das betrachtete Merkmal kontinuierlich variiert. Diese Annahme ist für ein Merkmal wie Kompetenz plausibel; würde man sie nicht machen, s müßte man eben von der Annahme ausgehen, dass die Kompetenz in diskreten Abschnitten ausgeprägt ist, und es ist einigermaßen schwer, zu erklären, wie es zu diskreten Ausprägungen kommen soll und wie man sie repräsentieren soll. Die Konstruktion einer Intervallskala für die Noten bedeutet, dass den Intervallen zwischen den Noten gleich große Unterschiede zwischen den Kompetenzen entsprechen. Aber eine derartige Wahl von Intervallgrenzen ist nur eine von mehreren möglichen, wie sich leicht verdeutlichen läßt. Es wird zunächst die Gauß-Verteilung betrachtet, im Anschluß daran die log-Normnalverteilung.

2.2 Das Gauß-Modell

Die Gauß-Dichte ist durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.10}$$

Abbildung 2: Gauß-Dichten und Zufallsstichproben für Punkteverteilungen ($n = 30$): (a) und (b) – $\mu = 10$, $\sigma = 5.55$, (c) und (d) $\mu = 15$, $\sigma = 5.55$.

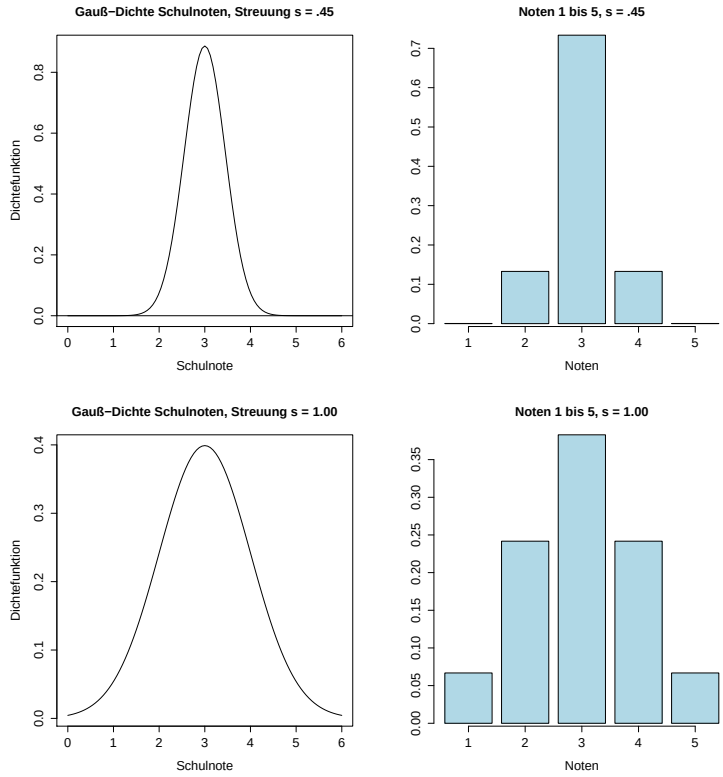


gegeben. Die Begründung für die Annahme der Gauß-Verteilung ist üblicherweise der Zentrale Grenzwertsatz[3] Abbildung 2 zeigt mögliche Stichprobenverteilungen von Punktwerten in einer Klasse mit 30 Schülerinnen und Schülern. In den Fällen (a) und (b) ist die Klausur "zu schwer" – die Daten wurden für einen "wahren" Wert $\mu = 15$ und einer Streuung $\sigma = 5.55$ generiert[4]. Für die Verteilung der Noten muß nun eine Unterteilung der Punktwerte um den Mittelwert $\bar{x}$ vorgenommen werden; Schwierigkeiten bereitet aber die Asymmetrie der Verteilung der Punktwerte, die durch die relativ große Standardabweichung $\sigma = 5.55$ bedingt wird. Um eine "richtige" Normalverteilung zu erhalten müßte die Streuung deutlich kleiner sein, was eine andere Verteilung der Aufgabenschwierigkeiten erfordert hätte, d.h.

[3]Man kann $X = \mu + \varepsilon(m)$ setzen, mit $\varepsilon(m) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m$. Die ε_j seien unabhängig und identisch verteilt, jeweils mit dem Erwartungswert c und endlicher Varianz σ_ε^2. Dann strebt die Verteilung von $(\varepsilon(m) - mc)/\sigma_\varepsilon\sqrt{m}$ mit wachsendem m gegen die Standardnormalverteilung, d.h. gegen (2.10) mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Der Satz kann auf den Fall schwacher Abhängigkeiten zwischen den ε_j verallgemeinert werden, vergl. Billingsley (1979), Abschnitt 27.

[4]Die Stichproben wurden mit dem R-Paket rnorm erzeugt, das auch gleich die bestpassenden Gauß-Dichten mitliefert.

Abbildung 3: Gauß-Dichten für Schulnoten: verschiedene Streuungen; rechts die zur Dichte korrespondierenden Verteilungen der Häufigkeiten der Noten (ohne Teilnoten). Die Formel für die Gauss-Verteilung wird im Anhang angegeben.



die Unterschiede zwischen den Aufgabenschwierigkeiten müßten kleiner sein. Hat man aber eine Klassenarbeit schreiben lassen, muß man die Daten so nehmen, wie sie sind ... Man beachte die Unterschiede zwischen den Häufigkeitsverteilungen (a) und (b) sowie zwischen (c) und (d) für die die Populationsparameter μ und σ^2 jeweils identisch sind.

Nimmt man an, dass die Punkteverteilung eine Stichprobe aus einer Gaussverteilten Grundgesamtheit ist, so korrespondiert zu x in (2.10) ein Punktwert S. Auf die Details der Schätzung von μ und σ muß hier nicht eingegangen werden. Von der geschätzten Dichte (2.10) muß man nun zur korrespondierenden Gauß-Verteilung für die Noten übergehen. Dazu kann man annehmen, dass die Noten Werte auf einem Kontinuum von y-Werten zwischen 0 und 7 liegen. Die Noten 1 bis 6 markieren bestimmte Abschnitte auf diesem Kontinuum. Die Frage ist nun, welchen Erwartungswert μ_y und welche Varianz σ_y^2 die y-Werte haben sollen. Nimmt man an, dass μ_y der mittleren Note (dem Mittelwert der Noten 1 bis 6) entsprechen soll, so wird man $\mu_y = 3.5$ setzen. σ_y muß so gewählt werden, dass die

Wahrscheinlichkeit, einen y-Wert kleiner als 0 oder größer als 6.5 oder 7 *praktisch* gleich Null ist. Für die Gauß-Verteilung gilt, dass eine lineare Transformation der Gauß-verteilten zufälligen Veränderlichen X wieder Gauß-verteilt ist; setzt man also $Y = aX + b$, so erhält man

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right), \quad \mu_y = a\mu_x + b,\ \sigma_y = a\sigma_x a. \tag{2.11}$$

(Anhang für Herleitung) Man kann nun $\mu_y = 3.5$ setzen, weil 3.5 as arithmetische Mittel der natürlichen Zahlen 1 bis 6 ist, – aber natürlich kann auch ein anderer Wert für μ_y angenommen werden. σ_y und damit der Parameter a in der Transformationsgleichung $Y = aX + b$ muß in jedem Fall so bestimmt werden, dass die Wahrscheinlichkeit von y-Werten kleiner als 0 und größer als 6.5 *praktisch* gleich Null ist.

Durch die Wahl der Parameter a und b kann mn sowohl den Mittwert (in der Abbildung 3 ist er die Note "3") als auch die Varianz relativ frei wählen (man muß nur die Einschränkung beachten, dass keine Werte kleiner als Null und größer als etwa 6.5 eine substantiell von Null abweichende Wahrscheinlichkeit haben), und mit dieser Wahl legt man die Häufigkeiten der Noten fest. Aus dieser Verteilung lassen sich die Intervallgrenzen für die Punkteverteilung bestimmen. Der Note "1" entspricht das Intervall $Y \leq 1.5$ und ein Punktwert $S \geq s_1$, und es gilt $p_1 = P(Y \leq 1.5) = P(S \geq s_1) = q_1$, und wegen der Symmetrie der Gauß-Dichte gilt $q_1 = 1 - p_1$. Ist Z standardnormalverteilt, so gilt mit $F(z) = P(Z \leq z)$ die Beziehung $p_1 = F(z_1)$, so dass $F^{-1}(p_1) = z_{01} = (s_{01} - \bar{s})/s_s$, d.h. $s_{01} = sz_1 + \bar{s}$, und $s_1 = -s_{01}$ wegen $q_1 - 1 - p_1$. Analog dazu bestimmt man s_2 mit $P(Y \leq s_2) = P(Y \geq s_2)$ etc. Für $S_i \geq s_1$ bekommt der Proband Pb_i eine "1", für $S_i \in (s_1, s_2)$ eine "2", etc.

Zur Konstruktion der Notenverteilung sind die Anmerkungen
http://matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=192487&ref=https

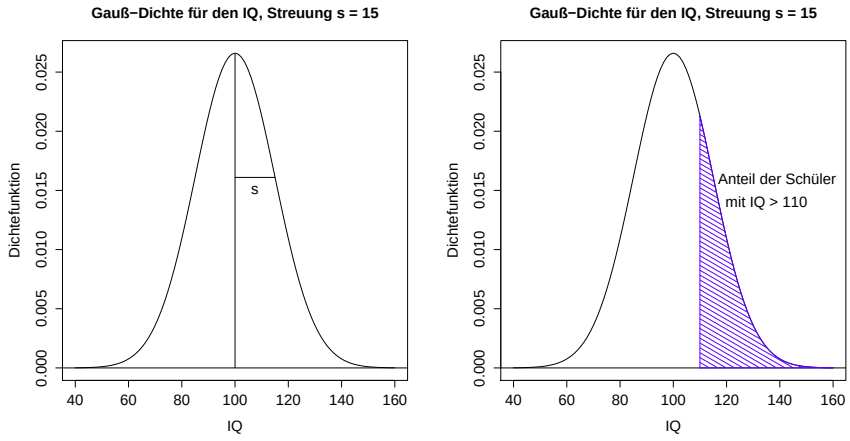
von Interesse. In Abbildung 3 sind die Intervalle für die Noten als gleich groß angenommen worden, d.h. man hat eine Intervallskala für die Noten konstruiert. Es gibt Alternativen: an der Universität Münster wurden z.B. Diplomnoten auf der Basis eines Kommissionsbeschlußes wie folgt ermittelt: In den einzelnen Fächern des Diploms wurden die Noten nach Gusto des Prüfers vergeben. Dann wird für eine(n) KandidatIn zunächst das arithmetische Mittel der Noten in den Einzelfächern gebildet. Anschließend wurden Mittelwerte bis 1.7 als "sehr gut" (um-)gewertet, d.h. es wurde die Note "1" vergeben. Mittelwerte im Bereich $1.7 < \bar{x} \leq 2.5$ wurden als "gut" umskaliert, d.h. es wurde die Note "2" vergeben, etc. Man kann eine derartige Regelung auch auf der Basis der Punkteverteilung einführen, denn den Kategoriengrenzen für die Noten entsprechen ja bestimmte Kategoriengrenzen für für die Punkteverteilung. Natürlich wird damit die Symmetrie der Notenvergabe ("gute" Noten haben dieselbe Wahrscheinlichkeit wie die entsprechenden "schlechten" Noten) aufgehoben. Man kann die Symmetrie wieder herstellen, indem man die Intervalle für die "1" und "6" gleichgroß, aber größer

als für die Noten "2" und "5" definiert und die für die Noten "3" und "4" wiederum gleichgroß, aber als kleinste Intervalle definiert. Das mag dem Geist der Annahme einer Normalverteilung widersprechen, aber das Münsteraner Beispiel zeigt, dass die Wahl der Intervallgrößen letzlich eben doch auf Annahmen beruht. Ein Argument für derartige ungleich große Intervalle ist zum Beispiel, dass ein Proband der Gauß-Verteilung entsprechend "sehr gut" sein kann, dass aber kleine Fehler sich nur negativ auswirken können, also notwendig häufiger zu einer Verschlechterung der Repräsentation der wahren Leistungsfähigkeit des Probanden führen. Zum Ausgleich müsse man dann, so die Argumentation, den Bereich, in dem eine "1" vergeben wird, vergrößern. Ob bei geringer Kompetenz Fehler nur eine Verbesserung der Repräsentation der Leistungsfähigkeit bewirken, sei dahin gestellt. Es ist bekannt, dass bei freier, also nicht auf einer Punkteverteilung beruhenden Benotung im Allgmeinen keine Intervallskala der Noten zugrunde liegt: Lehrende teilen den Notenbereich nach subjektiven Kriterien in Intervalle auf, wobei oft die mittlere Note, etwa "befriedigend" häufiger gewählt wird, als es einer Gauß-Verteilung mit gleich großen Intervallen entspricht. Dies soll ein Grund dafür sein, dass die Note "6" überhaupt noch gewählt werden kann, obwohl doch schon eine "5" ein "ungenügend" repräsentiert: die mittlere Note ist dann 3.5, und die Lehrenden müssen sich dann zwischen einer "3" und einer "4" entscheiden; der Neigung, eine "central tendency"-Note zu vergeben, soll damit entgegengewirkt werden.

Relativierung durch Normierung Im Prinzip läßt sich jede Punkteverteilung auf eine vorgegebene Notenverteilung transformieren. Aber genau deswegen stellt sich die Frage nach dem Sinn einer solchen Transformation; die Frage nach der Sinnhaftigkeit der Annahme der Gauß-Verteilung ist nicht von dieser Frage abhängig. Das Leistungsspektrum in zwei Parallelklassen kann aus verschiedenen Gründen unterschiedlich sein; die durchschnittliche Begabung ("Intelligenz") in den Klassen kann verschieden sein, verschiedene LehrerInnen können einen unterschiedllichen Effekt auf die Leistungen haben, etc. Zur Illustration betrachte man die möglichen Begabungsunterschiede. Es werde der Einfachheit halber angenommen, dass die SchülerInnen in einem Gymnasium einen Mindest-IOQ haben müssen, um das Gymnasium erfolgreich abschliessen zu können, es gelte etwa $IQ > 110$, vergl. Abbildung 4, wo die übliche Annahme einer Gauß-Verteilung der Intelligenzquotienten angenommen wurde. Die Verteilung der Intelligenzquotienten an einem Gymnasium ist dann mit großer Wahrscheinlichkeit nicht mehr Gauß-verteilt, da die IQen der SchülerInnen eben aus einer Teilpopulation mit einem IQ > 110 kommen. Man spricht von einer *trunkierten*[5] Gauß-Verteilung. Abbildung 5 illustriert diesen Sachverhalt. Die Stichprobengröße $n = 30$ bezieht sich auf die Anzahl von SchülerInnen in einer Klasse. Der Vergleich des Falles B mit den Fällen C und D zeigt, wie unterschiedlich die Begabungen in zwei Klassen verteilt sein können, obwohl sie Stichproben aus derselben Grundgesamtheit sind. Statt des Merkmals Intelligenz kann man auch ganz allgemein den Begriff

[5] wohl aus dem Englischen *to truncate* - kürzen, abschneiden etc

Abbildung 4: Beispiel für eine Gauß-Dichte: die Verteilung von Intelligenzquotienten. Links: Illustration des s-Werts, rechts: Anteil der Schüler mit einem IQ > 110 (gestrichelte Fläche unter der Dichtefunktion)



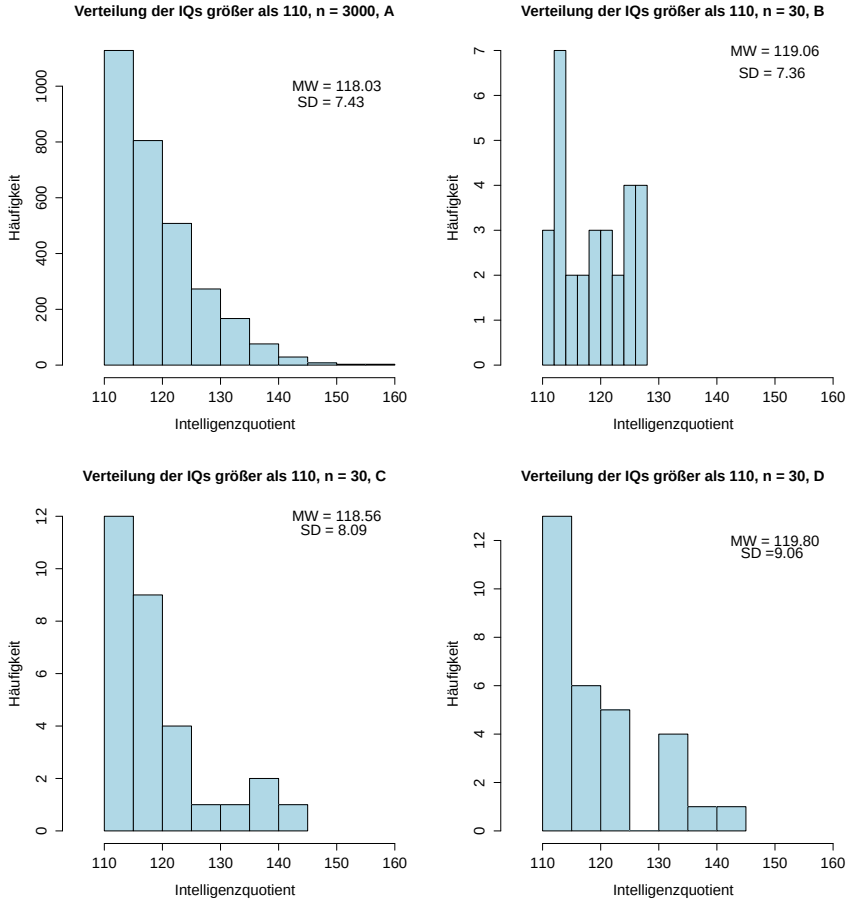
"Leistungsfähigkeit" einsetzen, die ja auch von den jeweiligne LehrerInnenn mit beeinflußt sein kann.

Der Begriff der Intelligenz, repräsentiert durch den IQ, ist ein *Konstrukt*, d.h. unter 'Intelligenz' wird das verstanden, was ein Intelligenztest mißt und was als Intelligenzquotient (IQ) angegeben wird[6] ist in der Gesamtpopulation normalverteilt, mit einem Populationsmittelwert von 100 und einer Streuung $\sigma = 15$.

Weiterführende Schulen, insbesondere das Gymnasium, setzen i. A. einen Mindest-IQ voraus. Für ein Gymnasium kann ein Mindest-IQ von 110 angenommen werden; werden fast 50% eines Jahrgangs zum Gymnasium zugelassen, so wird man eher einen Mindest-IQ von 105 annehmen müssen. Die folgenden Betrachungen beziehen sich beispielhaft auf einen Mindest-IQ = 110. Die Annahme eines Mindest-IQ bedeutet in jedem Fall, dass die Verteilung der IQen an einem Gymnasium *nicht* mehr normalverteilt ist, denn die Schüler stellen dann eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit dar, die aus der Teilmenge aller Personen mit einem IQ größer als der, mindestens aber gleich dem Mindest-IQ ist. Die Verteilung der IQen in dieser Teilmenge folgt einer *trunkierten Normalverteilung*, d.h. einer Verteilung, deren unteres Ende (IQ $<$ Mindest-IQ) abgeschnitten ist. Abbildung 5, (A) zeigt die Verteilung der IQen in einer Stichprobe vom Umfang 3000, – die Verteilung repräsentiert in guter Näherung die Population. Man

[6]Der IQ ist ein gewogener Mittelwert von Punktwerten ("Scores") für verschiedene kognitive Fähigkeiten; rechnerisches Denken, analytisches Denken, sprachliche Ausdrucksfähigkeit, etc gehen mit unterschiedlichen Gewichtungen in das IQ-Maß ein. Ob der IQ ein sinnvolles Maß ist, ist umstritten, viele Diagnostiker betrachten statt des IQ das Profil der Leistungen in den Untertests, weil es mehr Information über spezifische Begabungen bzw. Defizite liefert.

Abbildung 5: Stichprobenverteilungen der trunkierten Gauß-Verteilung. Fall A: $n = 3000$ Fälle, die Verteilung zeigt in guter Näherung die Verteilung der Populationswerte; sie entsprechen der rechten Seite der Dichte in Abb. 4. Die Fälle B bis D zeigen mögliche Verteilungen für *kleine* Stichproben ($n = 30$); die Häufigkeiten können stark von denen in der Population abweichen.



sieht, dass der durchschnittliche IQ in dieser Teilpopulation bei 118 liegt; dieser Wert entspricht in guter Näherung dem Durchschnittswert der studentischen Population. Die Abbildungen B, C und D zeigen mögliche Verteilungen des IQ in einzelnen Klassen, also Verteilungen von Stichproben aus dieser Population von im Durchschnitt $n = 30$ Schülern.

Nimmt man (vernünftigerweise) an, dass der μ-Wert einer Person hauptsächlich durch den IQ der Person bestimmt wird, so wird man eine Häufung von μ-Werten im unteren Bereich haben und eher wenige μ-Werte im oberen Bereich, d.h. die Verteilung der μ-Werte wird i.A. asymmetrisch sein. Diese Eigenschaft

widerspricht der Annahme einer Normalverteilung, die grundsätzlich symmetrisch ist, wie die Glockenkurve ja schon indiziert. Selbst wenn man von einer Normalverteilung der Gesamt"fehler" ε ausgehen kann (sie können symmetrisch um Null verteilt sein), macht es vermutlich wenig Sinn, von der Normalverteilung der individuellen Leistungen X_i auszugehen, – eben wegen der Nicht-Normalverteiltheit der μ_i.

Aus der Tatsache, dass der belgische Astronom und Statistiker Adolphe Quetelet fand, dass die Brustumfänge französischer Rekruten ebenso wie andere biologische Größen in sehr guter Näherung Gauß-verteilt sind (s. den kurzen historischen Abriß zur Gauß-Verteilung im Anhang), so folgt daraus noch lange nicht, dass auch kognitive Leistungen "normalverteilt" sind. Eine wesentlich plausiblere Verteilung der Leistungsfähigkeit der Schüler ist die Log-Normalverteilung, die im Folgenden kurz besprochen wird.

2.3 Die Log-Normalverteilung

Die Log-Normalverteilung entsteht, wenn y-Werte gemessen werden, die über die Exponentialfunktion mit normalverteilten X-Werten verbunden sind, d.h. wenn $y = e^x$ gilt; offenbar ist dann $\log y = x$ normalverteilt. Man findet diese Verteilung in vielen Bereichen, u.a. in der Biologie, der Ökonomie, etc. Die Frage ist, welchen Mechanismus man hinter dieser Verteilung vermuten kann. Es werden die beiden hauptächlich diskutierten Modelle vorgestellt. Verschiedene Log-Normalverteilungen über einem Leistungsbereich werden in Abbildung 6 gezeigt. Man sieht, dass für bestimmte Parameterwerte eine Log-Normalverteilung einer Normalverteilung ähnlich wird. Charakteristisch bleibt allerdings eine Asymmetrie: kleinere Punktwerte sind häufiger als größere Punktwerte.

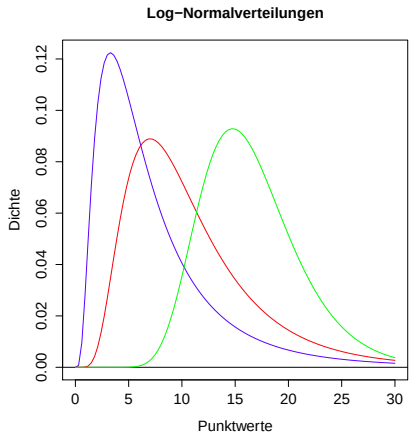
2.3.1 Das Shockley-Modell

Shockley[7] wunderte sich darüber, dass viele Leistungen log-normalverteilt sind: Die Anzahl von Publikationen von Wissenschaftlern ebenso wie die Größe von Firmen, die Häufigkeit einer Species in einer biologischen Umgebung wie die Häufigkeit von Buchstaben in einzelnen Wörtern ebenso wie die Häufigkeit von Wörtern in verschiedenen Sätzen, ja, auch die Häufigkeiten von Poren in Filtermembranen sind log-normalverteilt. Die Körpergröße von Menschen scheint normalverteilt zu sein, aber die Verteilung von Körpergrößen kann ebenso gut als Spezialfall einer Log-Normalverteilung beschrieben werden. Die Beispiele kommen aus allen Wissenschaften (Limpert et al, 2008).

Es wird angenommen, dass sich die Komponenten einer Leistung nicht additiv (wie bei der Normalverteilung) überlagern, sondern dass sie multiplikativ zusammenwirken. Es muß eine Reihe von Kompetenzen $K_1, \ldots, K_n$ zusammenkommen,

[7] William Bradford Shockley (1910 – 1989), Physiker, Erfinder des Transistors (Nobelpreis)

Abbildung 6: Verschiedene Log-Normaldichten über einem Bereich möglicher Punktwerte



damit eine Leistung – etwa in einer Klassenarbeit – zustande kommt. Jede dieser Kompetenzen ist bei einer Prüfung oder bei einer individuellen Prüfungsfrage oder -aufgabe vorhanden bzw. verfügbar oder nicht. Weiter wird angenommen, dass diese Kompetenzen statistisch unabhängig voneinander sind. Diese Annahme stellt vermutlich eine Vereinfachung dar, es läßt sich aber zeigen, dass es hinreichend ist, wenn die Unabhängigkeitsannahme zumindest angenähert gilt (die Rede ist dann von *asymptotischer Unabhängigkeit*). Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kompetenz K_j vorhanden ist sei p_j. Die Unabhängigkeitsannahme impliziert dann, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Prüfung gemeistert wird, durch das Produkt

$$p_i = p_{i1} \times p_{i2} \times \cdots \times p_{in} = \prod_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.12}$$

m die Anzahl der Schüler, und p_{ij}, $j = 1, \ldots, n$ die Wahrscheinlichkeit für den i-ten Schüler, die j-te Kompetenz verfügbar zu haben ist. Für gute Schüler sind die p_i-Werte eher größer, für schlechte sind zumindest einige der p_{ij}- und damit der p_i-Werte eher kleiner. Da wegen der Zufallsauswahl der Schüler in einer Klasse auch die individuellen Fähigkeiten zufällig variieren, sind auch die p_i-Werte zufällige Veränderliche, die von einem Schüler zum anderen variieren.

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrung der e-Funktion: ist $y = e^x$, so ist $x = \log_e x = \log x$ (zur Vereinfachung wird im Folgenden log statt $\log_e$ geschrieben). Dann gilt die zunächst etwas triviale Gleichung

$$x = e^{\log x},$$

denn dann ist ja $\log x = \log e^{\log x} = \log x$. Weiter gilt allgemein, dass der Loga-

rithmus eines Produkts $a \times b$ gleich der Summe der Logarithmen ist, d.h.

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

Anwendet auf (2.12) folgt

$$p = e^{\log p} = e^{\log p_1 + \log p_2 + \cdots + \log p_n}. \tag{2.13}$$

Da die p_i zufällige Veränderliche sind, ist auch der Logarithmus

$$x_i = \log p_i = \log p_{i1} + \log p_{i2} + \cdots + \log p_{in}$$

eine zufällige Veränderliche. Auf die Summe x_i ist aber wieder der Zentrale Grenzwertsatz anwendbar, so dass angenommen werden kann, dass x in guter Näherung normalverteilt ist, und das heißt, dass p eine Zufallsverteilung hat, die durch

$$p_i = e^{x_i} \tag{2.14}$$

mit normalverteiltem x_i gegeben ist. Die Verteilung der p_i ist dann die *Logarithmische Normalverteilung*, auch *Log-Normalverteilung* genannt. Die Formel findet man im Anhang. Hier ist nur von Bedeutung, dass die entsprechende Funktion (die Wahrscheinlichkeitsdichte) im Unterschied zur Normalverteilung *nicht* symmetrisch ist. Die häufigsten Leistungswerte finden sich im unteren Bereich, große und sehr große Werte treten im Vergleich dazu selten auf. Bei der Normalverteilung treten große und sehr große Werte mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf wie die entsprechenden kleinen und sehr kleinen Werte.

Die Log-Normalverteilung hat mindestens die gleiche Bedeutung in den Anwendungen wie die Normalverteilung. Praktisch alle Leistungen – ökonomische, wissenschaftliche (gemessen an der Zahl der Veröffentlichungen), künstlerische, sportliche etc etc folgen der Log-Normalverteilung; ebenso folgen viele biologische Größen der log-Normalverteilung. Eine der bekanntesten Anwendungen dieser Verteilung ist die auf die Größe von Einkommen bzw Vermögen: das Einkommen ist praktisch in allen Nationen log-normalverteilt, – zumindest im Bereich des "normalen" Einkommens. Für die großen Einkommen bzw. Vermögen geht die Verteilung in die Pareto-Verteilung über, so dass die Einkommensverteilung insgesamt eine *Mischung von Verteilungen* ist. Analoge Betrachtungen können für Schulleistungen gelten.

2.3.2 Das Gibrat-Modell

Ein alternativer Vorschlag über den zugrundeliegenden Mechanismus kommt von dem französischen Ingenieur Robert Gibrat (1904–1980), der von der Annahme

$$x_t - x_{t-1} = \varepsilon_t x_{t-1} \tag{2.15}$$

ausging; hier bedeuten x_t und x_{t-1} die Größen einer Firma zum Zeitpunkt t bzw. $t-1$ und ε_t ist die zufällig variierende Wachstumsrate zum Zeitpunkt t. Es läßt

sich zeigen, dass die Firmengrößen dann – wie in der Realität – log-normalverteilt sind. Bei einer Anwendung des Modells auch schulisches Lernen würde man (2.15) zufolge annehmen, dass der Wissens- oder Kompetenzunterschied zwischen zwei Zeiten (sinnvollerweise 1 Monat, 1 halbes Jahr, oder so ähnlich) proportional zu x_{t-1} ist, mit der zufälligen Variablen ε_t als Proportionalitätsfaktor. Ob dieses Modell ein plausibles Modell für das Erlernen von Fähigkeiten in der Schule ist müßte noch diskutiert werden. Das Modell wird hier in erster Linie erwähnt, um den Sachverhalt zu illustrieren, dass es für Wahrscheinlichkeitsverteilungen oft verschiedene "Mechanismen" gibt, die der Verteilung zugrunde liegen können.

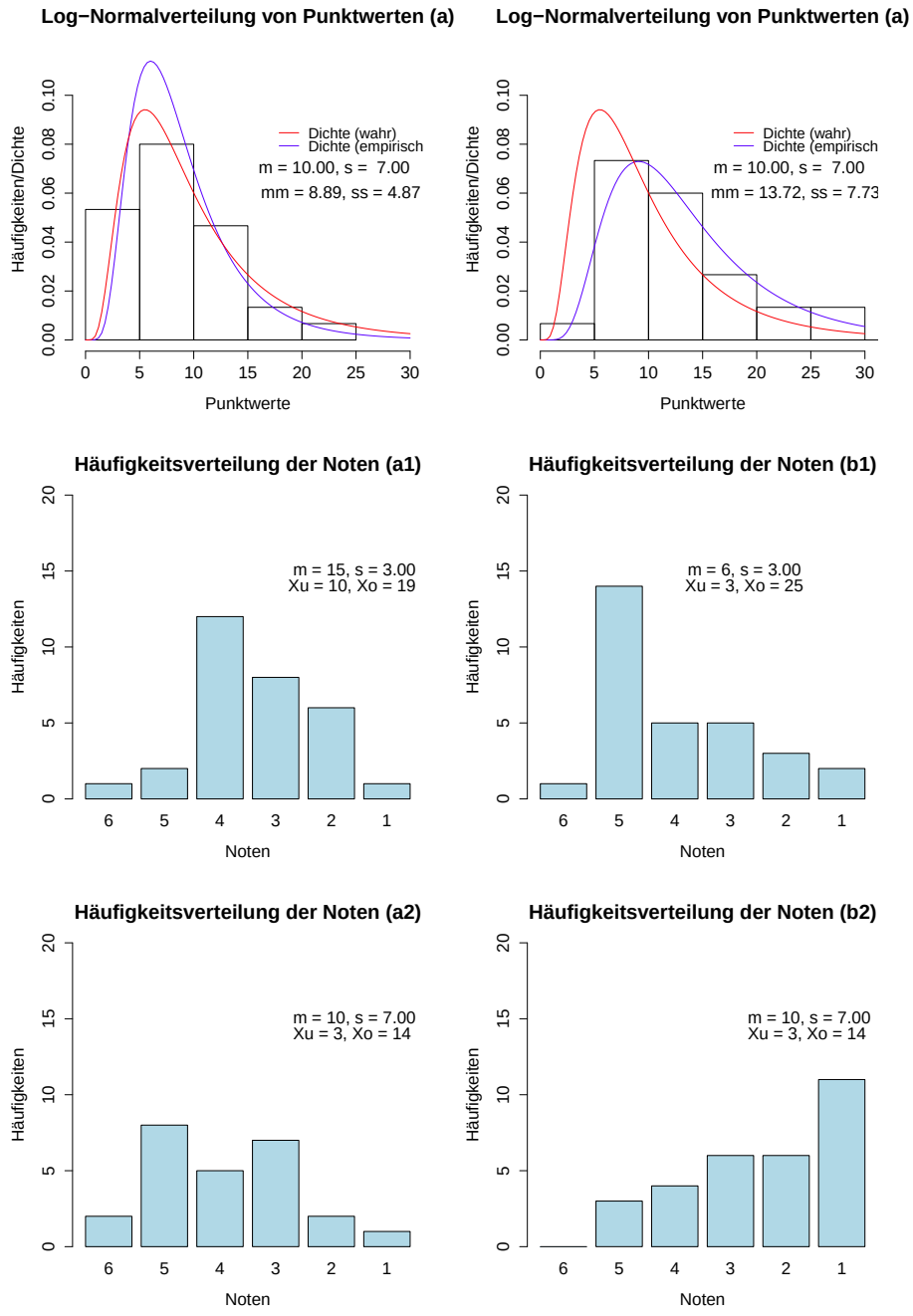
2.3.3 Illustration des log-Normal-Modells

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen in den obersten zwei Grafiken (i) eine "wahre" log-Normalverteilung (rot), mit den Parametern $\mathbb{E}(X) = m$ und der Standardabweichung $\sigma = s$ (ii) eine Häufigkeitsverteilung, die sich als Zufallsstichprobe vom Umfang $N = 30$ aus der durch die wahre Verteilung definierten Population ergibt, und eine log-Normalverteilung (blau), deren Parameter mm (Erwartungswert) und Streuung ss (Standardabweichung) der Stichprobenmittelwert und die Stichprobenstreuung sind. σ wird so gewählt, dass die Anzahl der Punkte den Wert 30 nicht übersteigt; dies entspricht einer Klausur mit maximal 30 Fragen. Die Übereinstimmung mit dem Stichprobenumfang ist Koinzidenz. Die roten und blauen Kurven zeigen, wie groß die Unterschiede zwischen der wahren und der Stichprobenverteilung sind. Die beiden oberen Grafiken zeigen zwei verschiedene Stichproben aus ein und derselben Population. Die Verteilungen in Abbildung 7 entsprechen einer "schwierigen" Klausur – der mittlere Punktwert ist eher niedrig, während die Abbildung 8 eine mittelschwere Klausur repräsentiert; hier würde eine Gauß-Verteilung ebenfalls gut passen.

Unter jeder dieser Grafiken werden zwei Notenverteilungen gezeigt, die sich beide aus derselben Stichprobenverteilungen ergeben. Die Notenverteilungen ergeben sich, indem ein unterer X_u) und ein oberer X_o) Punktwert gewählt wird und eine Einteilung in vier Unterabschnitte $d = (X_o - X_u)/4$ berechnet wird. Einem Score $X < X_u$ wird die Note "6", zu geordnet, einem Score $X \in [x_u, X_u + d)$ die Note "5", für $X \in [X_u + d, X_u + 2d)$ ergibt sich die Note "4", etc, und für $X \geq X_o$ ergibt sich die Note "1". Die beiden Notenverteilungen ergeben sich durch verschiedene Wahlen von X_u und X_o.

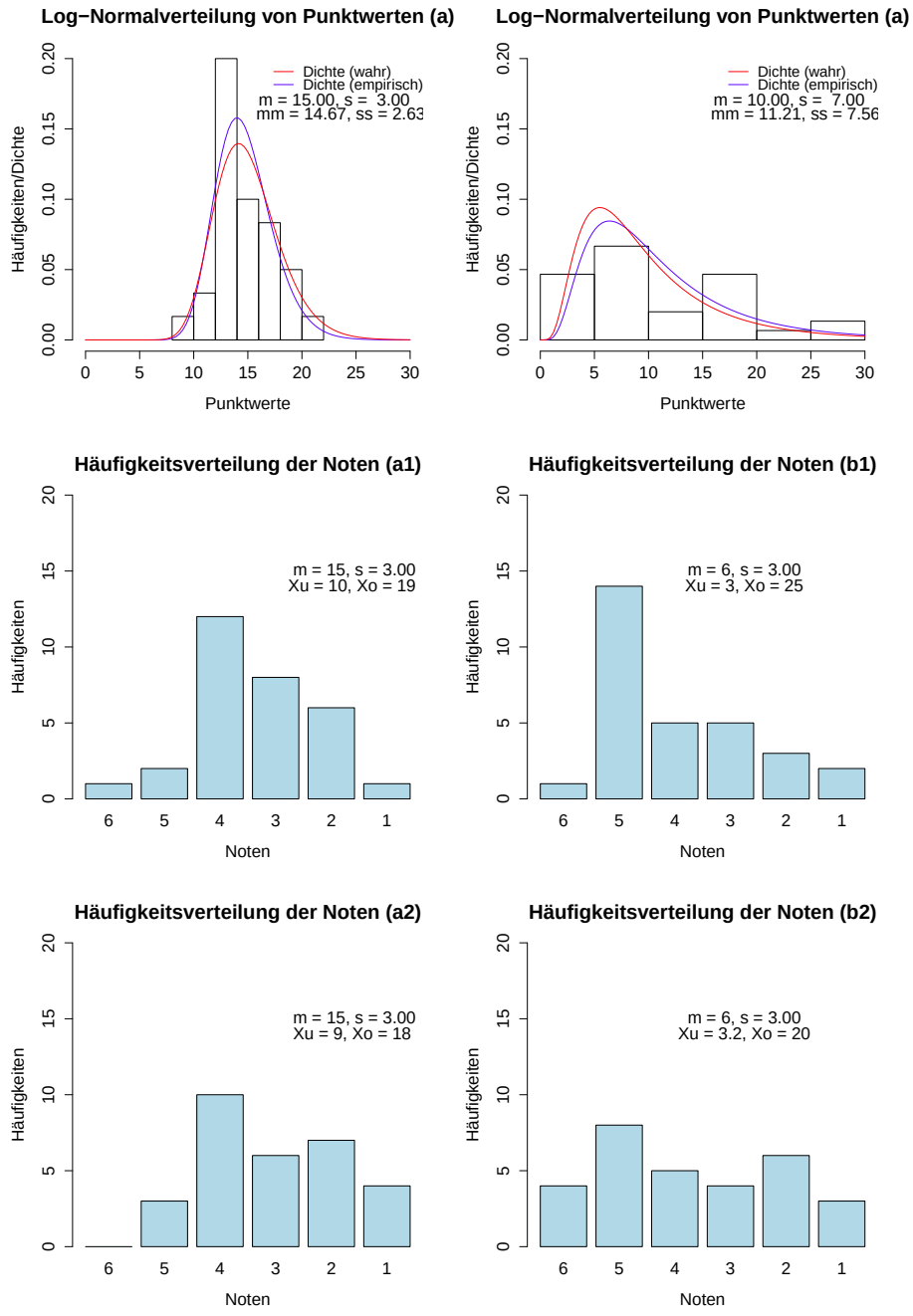
Die wesentliche Aussage der beiden Abbildungen ist der Befund, dass sich die Notenverteilungen in Abhängigkeit von Stichprobeneffekten einerseits und der mehr oder weniger willkürlich gewählten X_u, X_o-Werte stark unterscheiden. Natürlich kann man auch hier den Eindruck erzwingen, die Noten seien Gaußverteilt: dazu müssen aber die Intervallgrenzen geeignet gewählt werden und möglicherweise eine Gewichtung der einzelnen Aufgaben vorgenommen werden, wie anfangs schon angemerkt. Eine alternative Wahl der Intervallgrenzen würde aber die Eigenschaft der Intervallskala zerstören, d.h. die einzelnen Noten wür-

Abbildung 7: Log-normale Punkteverteilung I neu



den verschieden große Fähigkeitsbereiche definieren; man kann dann argumen-

Abbildung 8: Log-normale Punkteverteilung II



tieren, dass die Noten kaum interpretierbar sind. Würde man von einer Gauß-

Verteilung der Scores ausgehen, würde man zu einem analogen Befund kommen. Die Log-Normalverteilung hat den Vorteil, auch für "schwierige" Klausuren eine vernünftige Grundverteilung zu sein, da sie nur für Scores größer oder gleich Null definiert ist. Damit die Anwendung der trunkierten Gauß-Verteilung umgangen werden kann erfordert eine schwierige Klausur korrespondierend kleine Standardabweichungen, um den Bereich der erreichten Scores abzudecken, – empirisch ist eine kleine Standardabweichung aber oft nicht zu rechtfertigen. Die log-Normalverteilung erklärt leicht den Fall hauptsächlich kleinerer Scores und relativ wenigen großen Scores.

3 Das Rasch-Modell

3.1 Das Modell

Ein zentrales Problem der klassenspezifischen Renormierung der Ergebnisse etwa einer Klassenarbeit besteht in der impliziten Neubewertung von Aufgaben von "leicht" bis "schwer" nach Maßgabe der jeweils vorgefundenen Punkteverteilung. Dadurch werden die unvermeidlichen Zufälligkeiten in den vergebenen Punkten überbewertet: im Extremfall sind alle Schüler gleich kompetent, werden aber auf der Basis der zufälligen Unterschiede zwischen den Punktwerten mit den Noten 1 bis 5 bedacht. Darüber hinaus wird die Vergleichbarkeit der Noten zerstört: so reflektiert eine 2 ("gut") eben nicht mehr eine "gute" Komptetenz in allen Klassen und Schulen, – ein "gut" in einer Klasse kann im Prinzip einem "ausreichend" in einer anderen Klasse entsprechen.

Das Problem ist schon lange in der psychologischen Diagnostik bekannt. In der in den ersten Jahrzehnten des 20-ten Jahrhunderts entwickelten Klassischen Testtheorie (KTT), der Theorie psychometrischer Tests, gelten Aufgaben als "schwer", wenn nur wenige in der Population sie korrekt beantworten können, dagegen als "leicht", wenn viele die richtige Antwort geben können. Vergleiche z.B. der durchschnittlichen Intelligenz in verschiedenen Bevölkerungsgruppen (z.B. soziökonomische Gruppen) führen dann schnell zu Fehleinschätzungen, zumal auch hier die Gauß-Verteilung als angeblich natürliche Verteilung der Ausprägungen von Merkmalen für deren Bewertung zugrunde gelegt wurde.

Ideen wie die der Gauß-Verteilung als natürliche Verteilung für Merkmalsausprägungen können sich in einer Forschergemeinde lange halten, auch wenn sie keine guten Ideen sind. Die meisten Forscher werden in ihre jeweiligen Gebiete über das Studium des Faches, in dem das Gebiet liegt eingeführt und übernehmen die stillschweigend gemachten Annahmen eben als natürliche Annahmen. Erst wenn jemand aus einem anderen Fach sich dem Gebiet – hier dem Gebiet der Messung von Persönlichkeitsmerkmalen – zuwendet kann es geschehen, dass sie oder er die Standardannahmen nicht mehr als gottgegeben einschätzt. Diese Rolle übernahm der dänische Statistiker Georg Rasch (1901 – 1980), als er

1960 und 1961 forderte, dass Messungen unabhängig von den jeweiligen Bedingungen und Messinstrumenten sein sollten. Er schlug ein *probabilistisches* Modell der Messung vor, das dieser Forderung genügt, wobei angemerkt werden muß, dass die Bezeichung 'probabilistisches' Modell insofern irreführend ist, als auch der klassische Ansatz der KTT probabilistisch ist, denn dort wird ja ebenfalls angenommen wird, dass die Leistung eine zufällige Komponente enthält ($x = \mu + \varepsilon$). Bezeichungsfragen müssen hier aber nicht weiter diskutiert werden, statt dessen soll kurz der Rasch-Ansatz vorgestellt werden.

Der Einfachheit halber werden *dichotome Aufgaben* betrachtet; das sind Aufgaben, deren Lösung entweder mit "richtig" oder "falsch" beurteilt werden kann. Zur Kennzeichnung wird eine *Indikatorvariable* eingeführt: $X_g \in \{0, 1\}$, wobei der Index g anzeigt, dass X_g die Antwort auf die g-te Aufgabe anzeigt: $X_g = 0$, wenn die g-te Aufgabe nicht oder falsch beantwortet wurde, und $X_g = 1$, wenn sie korrekt beantwortet wurde, und $g = 1, \ldots, n$, wenn es n Aufgaben gibt. Weiter sei θ ein Maß für die Kompetenz oder Fähigkeit einer oder eines Probanden.

Rasch geht davon aus, dass Aufgaben mit einer bestimmten, vom θ-Wert eines Probanden abhängenden Wahrscheinlichkeit korrekt beantwortet werden, d.h. es soll $0 \leq P(X_g = 1|\theta) \leq 1$ gelten. Weiter muß Rasch annehmen, dass die Beantwortung der verschiedenen Aufgaben für fixen Wert von θ stochastisch unabhängig sind. Nach der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit von einer Folge von Werten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (wobei ein beliebiges X_g den Wert 0 oder 1 annehmen kann) durch das Produkt der Wahrscheinlichkeiten $P(X_g|\theta)$ gegeben ist:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta) = P(X_1|\theta)P(X_2|\theta)\cdots P(X_n|\theta). \tag{3.1}$$

Dies bedeutet, dass die Aufgaben dieser Forderung entsprechend ausgewählt werden müssen, d.h. die Beantwortung einer Aufgabe darf nicht die Beantwortung einer anderen voraussetzen.

Definition 3.1 *Gilt für n Aufgaben die Gleichung (3.1), so erfüllen die Aufgaben die Bedingung der* lokalen stochastischen Unabhängigkeit.

Man spricht auch kurz von *lokaler Unabhängigkeit*. "Lokal" heißt dabei, dass die Unabhängigkeit jeweils für einen bestimmten Ort auf der Fähigkeitsskala, eben θ, bezieht.

Rasch benötigt nun noch eine Funktion, die die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Antwort auf eine Aufgabe definiert, wenn die Fähigkeit des Schülers den Wert θ hat, d.h. für $P(X_g = 1|\theta)$. Dieser Ausdruck muß so definiert sein, dass die Schätzung von θ unabhängig von der Schätzung von κ_g, der Schwierigkeit der

g-ten Aufgabe ist. Er findet ihn in der *logistischen Verteilung*[8]

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{(x-\mu))\beta}{\sigma}\right)}, \quad \beta = \pi/\sqrt{3}. \tag{3.2}$$

und mit $\gamma = \beta/\sigma$ erhält man

$$P(X \leq x) = \frac{1}{1 + \exp(-(x-\mu)\gamma)} \tag{3.3}$$

μ ist der Erwartungswert von X, d.h. der Mittelwert über alle möglichen Realisierungen von X, und σ ist die korrespondierende Standardabweichung. Interpretiert man X als die Leistungsfähigkeit eines Probanden zur Zeit der Aufgabenstellung, so kann man $\theta = \mu$ setzen, d.h. als den Erwarteten Wert der Leistungsfähigkeit eines Probanden setzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Proband die Aufgabe korrekt beantwortet, ist durch $P(X > \kappa_g)$ gegeben, wobei κ_g die Schwierigkeit der g-ten Aufgabe ist; die Schwierigkeit ist damit als die minimale Fähigkeit definiert, die ein Proband haben muß, um die Aufgabe korrekt zu beantworten; κ_g ist also ein Wert auf derselben Skala wie θ. Da

$$P(X > \kappa_g) = 1 - P(X \leq \kappa_g)$$

folgt

$$P(X > \kappa_g) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-(\kappa_g - \theta)\gamma)} = \frac{\exp(-(\kappa_g - \theta)\gamma)}{1 + \exp(-(\kappa_g - \theta)\gamma)}.$$

Setzt man $\kappa_g' = \gamma\kappa_g$, $\theta' = \gamma\theta$ und benennt dann κ_g' und θ' wieder in κ_g und θ um (Reparametrisierung), so ergibt sich

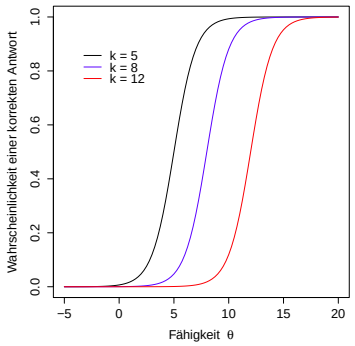
$$P(X > \kappa_g) = \frac{\exp(\theta - \kappa_g)}{1 + \exp(\theta - \kappa_g)}. \tag{3.4}$$

Definition 3.2 *Es sei $F_g(\theta) = P(X_g = 1|\theta) = P(X > \kappa_g)$; $F_g(\theta)$ heißt* Itemfunktion *für die g-te Aufgabe.*

Der Ausdruck 'Item' steht in der Theorie psychometrischer Tests für 'Aufgabe', 'Frage'. Abbildung 9 zeigt Itemfunktionen für verschiedene κ-Werte; die Itemfunktionen sind parallel, d.h. sie werden auf der θ-Achse nur parallel verschoben. Die Definition des Rasch-Modells ist dann

[8]Der Ausdruck 'logistisch' bezieht sich auf einen stochastischen Wachstumsprozess, den der belgische Mathematiker Pierre Verhulst (1801 – 1849) konzipiert hat, um im Auftrag der Pariser Stadtverwaltung den wegen des Bevölkerungswachstums benötigten Zuwachses an Wohnungen (frz. logis = Wohnung) abzuschätzen. Die Dichtefunktion der logistischen Verteilung ist durch $f(x) = \gamma F(x)(1 - F(x))$ gegeben, und damit entspricht die rechte Seite formal dem Ausdruck $N(t)(K - N(t)$ in Verhulsts Modell, $N(t)$ die Anzahl der Wohnungen zur Zeit t; γ ist eine Normierungskonstante.

Abbildung 9: Itemfunktionen (Wahrscheinlichkeiten einer korrekten Antwort als Funktion der Fähigkeit θ) für verschiedene Schwierigkeiten κ; je größer der Wert von κ, desto schwieriger die Aufgabe.



Definition 3.3 *Es sei $X_g = \{0, 1\}$ eine Indikatorvariable definiert: $X_g = 1$, wenn die Aufgabe gelöst oder der Meinungsaussage zugestimmt wurde, und $X_g = 0$ sonst. Die Itemfunktion sei durch*

$$F_g(\theta) = P(X_g = 1|\theta) = \frac{e^{\theta-\kappa_g}}{1 + e^{\theta-\kappa_g}}, \tag{3.5}$$

gegeben und es gelte lokale Unabhängigkeit. Das Testmodell heißt dann Rasch-Modell.

$F_g(\theta)$ ist nur eine abkürzende Schreibweise für $P(X_g = 1|\theta)$. Die Wahrscheinlichkeit, die g-te Aufgabe, zu korrekt zu beantworten, hängt also von den Parametern κ_g und θ ab. Dividiert man Zähler und Nenner der rechten Seite von (3.5) durch $e^{\theta-\kappa_g}$, d.h. multipliziert man Zähler und Nenner mit $e^{-(\theta-\kappa_g)} = e^{\kappa_g-\theta}$, so wird (3.5) zu

$$F_g(\theta) = \frac{1}{1 + e^{\kappa_g-\theta}}. \tag{3.6}$$

Man sieht leicht, dass $F_g(\theta) \to 1$ für $\theta \to \infty$ und $F_g(\theta) \to 0$ für $\kappa_g \to \infty$. Hat man m Probanden (Schüler), so muß man $\theta_1, \ldots, \theta_m$ Fähigkeitsparameter schätzen, und zusätzlich n Schwierigkeitsparamter $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$.

Ein wichtiger Begriff, der in Bezug auf (3.5) eingeführt werden muß, ist der der *Rasch-Homogenität*: intuitiv ist damit gemeint, dass die Aufgaben (Items), die (3.5) genügen, alle nur ein und dasselbe Merkmal messen, dessen Ausprägung bei einer Person a eben durch θ bzw. θ_a repräsentiert wird. Die Rasch-Homogenität läßt sich auch formal definieren, und aus dieser Definition folgt dann (3.5):

Definition 3.4 *Es seien X_g, X_h Indikatorvariablen, $g, h = 1, \ldots, n$, für dichotome Aufgaben, d.h. für Aufgaben mit nur zwei möglichen (richtig, falsch) Antworten. Irgendzwei Aufgaben I_g und I_h sind* Rasch-homogen*, wenn*

$$\theta - \kappa_g = \log\left[\frac{P(X_g = 1|\theta)}{P(X_g = 0|\theta)}\right] = \log\left[\frac{P(X_h = 1|\theta)}{P(X_h = 0|\theta)}\right] + \delta_{gh}. \tag{3.7}$$

Anmerkung: Formal bedeutet (3.7), dass sich die Logits für irgendzwei Aufgaben nur um eine additive Konstante – δ_{gh} – unterscheiden sollen; für fixen θ-Wert bedeutet dies, dass sich die additive Konstante nur auf eine Differenz der Schwierigkeiten beziehen kann, was wiederum impliziert, dass θ und die Schwierigkeiten sich auf das gleiche Merkmal beziehen müssen.

Nachweis der Äquivalenz von (3.7) und (3.5): Gilt nun (3.5), so folgt leicht, dass auch (3.7) gilt, mit $\delta_{gh} = \kappa_h - \kappa_g$.

Um zu sehen, dass die Beziehung (3.7) auch (3.5)impliziert, betrachte man zunächst

$$\theta - \kappa_g = \log\left[\frac{P(X_g = 1|\theta)}{P(X_g = 0|\theta)}\right].$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$e^{\theta-\kappa_g} = \frac{P(X_g = 1|\theta)}{P(X_g = 0|\theta)} = \frac{P(X_g = 1|\theta)}{1 - P(X_g = 1|\theta)},$$

woraus sofort

$$P(X_g = 1|\theta) = \frac{e^{\theta-\kappa_g}}{1 + e^{\theta-\kappa_g}}$$

folgt. Weiter folgt in Bezug auf die rechte Seite von (3.7)

$$e^{\theta-\kappa_g} = \frac{P(X_h = 1|\theta)e^{\delta_{gh}}}{P(X_h = 0|\theta)} = \frac{P(X_h = 1|\theta)e^{\delta_{gh}}}{1 - P(X_h = 1|\theta)},$$

woraus sich

$$P(X_h = 1|\theta) = \frac{e^{\theta-\kappa_g-\delta_{gh}}}{1 + e^{\theta-\kappa_g-\delta_{gh}}} = \frac{e^{\theta-\kappa_h}}{1 + e^{\theta-\kappa_h}}$$

ergibt. □

Parametrisierungen: Die Form (3.5) des Rasch-Modells heißt *subtraktive Parametrisierung*, da die Wahrscheinlichkeit einer Lösung oder Beantwortung ($X_g = 1$) von der Differenz $\theta - \kappa_g$ abhängt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass sowohl die Person (mit dem Parameter θ) wie auch das Item (die Aufgabe) I_g (mit dem Parameter κ_g) auf der gleichen Skala positioniert werden. Nun gilt aber auch

$$\frac{e^{\theta-\kappa_g}}{1 + e^{\theta-\kappa_g}} = \frac{e^{\theta}e^{-\kappa_g}}{1 + e^{\theta}e^{-\kappa_g}},$$

d.h. das Modell kann in der Form

$$F_g(\theta) \to G_g(\vartheta) = \frac{\vartheta\sigma_g}{1+\vartheta\sigma_g}, \quad \vartheta = e^{\theta}, \quad \sigma_g = e^{-\kappa_g} \tag{3.8}$$

geschrieben werden; diese Form des Modells heißt *multiplikative Parametrisierung*. Für manche Betrachtungen ist diese Art der Parametrisierung vorteilhaft.

Zulässige Transformationen: Die θ- und der κ-Skalen sind offenbar nur eindeutig bis auf Translationen. Dies folgt eben aus

$$\theta' = \theta + \alpha,\ \kappa'_g = \kappa_g + \alpha \Rightarrow \theta - \kappa_g = \theta' - \kappa'_g, \tag{3.9}$$

d.h. die Skala, auf der θ und κ_g Werte annehmen, ist eindeutig bis auf Addition einer beliebigen, endlichen Konstanten α (die positiv oder negativ sein kann). Hat man also Skalenwerte θ und κ_g gefunden, die dem Modell genügen, so kann man

$$\alpha = -\sum_{g=1}^{n} \kappa_g \tag{3.10}$$

setzen und zu Werten $\theta' = \theta + \alpha$, $\kappa'_g = \kappa_g + \alpha$ übergehen. Anschließend kann man θ' und κ'_g wieder in θ und κ_g umbenennen, und für die κ_g-Werte gilt dann

$$\sum_{g=1}^{n} \kappa_g = 0. \tag{3.11}$$

Wettquotienten und Logits: Aus (3.5) folgt sofort

$$P(X_g = 0|\theta) = 1 - P(X_g = 1|\theta) = \frac{1}{1 - e^{\theta - \kappa_g}}.$$

Daraus ergibt sich die als *Wettquotient* bekannte Größe

$$\frac{P(X_g = 1)}{P(X_g = 0)} = e^{\theta - \kappa_g}, \tag{3.12}$$

und durch Logarithmieren[9] erhält man das *Logit*

$$\text{Logit}P(X_g = 1|\theta) = \log\left(\frac{P(X_g = 1)}{P(X_g = 0)}\right) = \theta - \kappa_g. \tag{3.13}$$

Der Wettquotient gibt an, wie die Chancen stehen, dass z.B. die Person a das Item I_g löst. Es sei etwa $P(X_{ag} = 1) = .75$. Dann ist $P(X_{ag} = 0) = .25$ der Wettquotient beträgt $.75/.25 = 3/1$, d.h. die Chancen stehen 3 zu 1, dass a die Aufgabe löst. Beträgt die Wahrscheinlichkeit, das Item zu beantworten oder zu lösen, nur .65, so ist $.65/.35 \approx 1.8 \approx 9/5$; - Wettquotienten werden üblicherweise

[9] Es ist hier stets der *natürliche Logarithmus*, also der Logarithmus zur Basis e, gemeint.

als Quotienten ganzer Zahlen ausgedrückt und sind deswegen im Allgemeinen Näherungswerte.

Die folgende Eigenschaft des Modells macht seine wirkliche Bedeutung für die Evaluation von Leistungen aus: die Personenparameter θ und die Schwierigkeitsparameter κ_g können *unabhängig voneinander geschätzt werden*:

3.2 Spezifische Objektivität

Gegeben seien zwei Probanden $a, a' \in \mathcal{P}$ mit den Parameterwerten θ_a und $\theta_{a'}$. Für ein gegebenes Item I_g werde nun die Differenz der Logits für die beiden Probanden betrachtet:

$$\log\left(\frac{P(X_{ag}=1)}{P(X_{ag}=0)}\right) - \log\left(\frac{P(X_{ga'}=1)}{P(X_{ga'}=0)}\right) = \theta_a - \theta_{a'} - \kappa_g + \kappa_g = \theta_a - \theta_{a'}. \quad (3.14)$$

Die Differenz der Logits ist also nur durch die Differenz der Probandenparameter definiert und unabhängig vom Itemparameter κ_g. Dieses Ergebnis gilt natürlich für ein beliebiges Item I_g, also für alle I_g. Die Gleichung (3.14) erlaubt den Vergleich zweier Personen unabhängig von den Items, mit denen sie getestet werden. Diese Eigenschaft eines Testmodells, also der Vergleich von Personen unabhängig von den im Test verwendeten Items, wird die *spezifische Objektivität* eines Tests genannt.

Auf analoge Weise sieht man, dass die Differenz der Logits für zwei Items unabhängig von den Personen ist:

$$\log\left(\frac{P(X_{ag}=1)}{P(X_{ag}=0)}\right) - \log\left(\frac{P(X_{g'a}=1)}{P(X_{g'a}=0)}\right) = \theta_a - \theta_a - \kappa_g + \kappa_{g'} = \kappa_{g'} - \kappa_g. \quad (3.15)$$

Diese Gleichung bedeutet, dass man die Differenz der Schwierigkeit zweier Items unabhängig von irgendwelchen Personenparametern bestimmen kann, d.h. die Items können unabhängig von der Stichprobe oder gar Population von Probanden hinsichtlich ihrer Schwierigkeit miteinander verglichen werden. Die spezifische Objektivität und die Populationsunabhängigkeit der Itemparameter sind charakteristisch für das Rasch-Modell und machen einen großen Teil seiner Attraktivität aus.

3.3 Die Schätzung der Modellparameter

Werden Personen befragt oder getestet, so möchte man i. A. etwas über die Ausprägung der untersuchten Merkmals bei den Personen erfahren. Darüber hinaus kann es von Interesse sein, zu erfahren, ob die Items das Merkmal in unterschiedlichem Maße erfassen oder nicht, ob sie also gleich schwierig sind oder nicht. Dazu müssen im Falle des Rasch-Modells die Parameter θ_a und κ_g geschätzt werden.

Das Problem bei Modellen wie denen von Rasch ist, dass die Parameter nicht in direkter Beziehung zu beobachtbaren Größen stehen. Denn es werden nur Wahrscheinlichkeiten "vorausgesagt", um im Jargon der Regressionsanalyse zu bleiben: Die Gleichung

$$P(X_{ag} = 1|\theta_a, \kappa_g) = \frac{e^{\theta_a - \kappa_g}}{1 + e^{\theta_a - \kappa_g}}$$

besagt ja, dass die rechte Seite eben nur die Wahrscheinlichkeit $P(X_{ag} = 1|\theta_a, \kappa_g)$ bestimmt. Die wird aber nicht beobachtet, sondern nur die manifeste Variable X_{ag}, die bei der Person a und der Aufgabe I_g bei einer Testvorgabe entweder den Wert 1 oder 0 annimmt. Man könnte die Wahrscheinlichkeit durch wiederholte Vorlage abschätzen, nur wird das nicht funktionieren: wenn die Person etwa die Lösung erinnert, wird die manifeste Variable stets den Wert 1 annehmen. Abgesehen davon wird die Anzahl der Vorlagen des Tests kaum jemals hinreichend groß sein können, um eine vernünftige Schätzung von $P(X_{ag} = 1)$ anhand relativer Häufigkeiten zu erlauben.

Die Methode der Wahl ist demnach die *Maximum-Likelihood-Methode*. *Likelihood* heißt zunächst einfach nur – wie 'probability' – 'Wahrscheinlichkeit', meint hier aber speziell die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Daten oder Messungen, unter der Bedingung, dass die Parameter der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmte Werte haben. Es seien die Daten einer Stichprobe von m Personen gegeben, die auf n dichotome Items antworten. Die Daten können in einer Matrix zusammengefasst werden; man spricht auch von einer *Datenstruktur*:

$D =$

Person	Aufgaben					Σ_a
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	1	0	0	0	1
4	1	1	0	1	0	3
5	0	0	1	1	1	3
6	1	1	0	0	0	2
7	1	0	1	1	1	4
8	0	0	0	0	1	1
9	1	1	0	1	1	4
10	0	0	1	1	0	2
Σ_g	4	4	3	5	5	

(3.16)

Hier gibt es $m = 10$ befragte oder getestete Personen $a = 1, \ldots, m$, und fünf dichotome Aufgaben, $g = 1, \ldots, n$. Eine 1 oder eine 0 repräsentiert die Realisierung der zufälligen Veränderlichen $X_{ag} = \{0, 1\}$. $n_g = \sum_a X_{ag}$ ist die Häufigkeit, mit der die g-te Aufgabe gelöst bzw. positiv beantwortet wurde, $m_a = \sum_g X_{ag}$ ist die Anzahl der Aufgaben, die von der Person a gelöst wurden.

Man kann nun die Likelihood dieser Daten definieren, vorausgesetzt, die X_{ag}

sind alle stochastisch unabhängig. Die Likelihood der Daten ist durch

$$L(X_{11},\ldots,X_{mn}) = \prod_{a=1}^{m}\prod_{g=1}^{n}\frac{e^{X_{ag}(\theta_a-\kappa_g)}}{1+e^{\theta_a-\kappa_g}}, \quad X_{ag}=\{0,1\} \tag{3.17}$$

gegeben.

Bei der Likelihood-Funktion (3.17) sind die Parameter θ_a und κ_g die freien Parameter, deren Werte bestimmt werden sollen. Der Bestimmung dieser Werte liegt die folgende 'Philosophie' zugrunde: Es folgt ja aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit höher höher ist als die des Ereignisses $E' \neq E$, eben eher und damit auch häufiger eintritt als E'. Hat man umgekehrt ein zufälliges Ereignis E beobachtet, so kann man davon ausgehen, dass E eine höhere Wahrscheinlichkeit hat als die Ereignisse E', deren Wahrscheinlichkeit geringer ist. Das kann im Einzelfall durchaus falsch sein, aber *im Allgemeinen* liegt man mit dieser Vermutung richtig. Da nach (3.17) die Wahrscheinlichkeit L der Daten von den Werten der Parameter θ_a und κ_g abhängt, ist es dementsprechend eine plausible Annahme, dass sie L maximieren. Man kann L als Funktion von θ_a und κ_g auffassen. Man kann nun L als Funktion von θ_a und κ_g auffassen. Die Aufgabe ist nun, diejenigen Werte $\hat{\theta}_a$ und $\hat{\kappa}_g$ zu bestimmen, für die L maximal wird. Diese Werte bestimmt man, indem man die *Likelihood-Funktion* einmal nach θ_a differenziert, und einmal nach κ_g; man spricht von *partiellen Ableitungen*. Für diejenigen Werte $\hat{\theta}_a$ und $\hat{\kappa}_g$, für die die beiden partiellen Ableitungen gleich Null werden, nimmt L einen maximalen Wert an. Man fasst dementsprechend die beiden partiellen Ableitungen als Gleichungen in den Unbekannten $\hat{\theta}_a$ und κ_g auf, mit $a = 1,\ldots,m$ und $g = 1,\ldots,n$, d.h. es müssen $n+m$ Gleichungen gelöst werden.

Die Herleitung dieser Gleichungen soll hier nicht durchgeführt werden; das partielle Differenzieren von L nach den θ_a und κ_g etc. ist ein wenig länglich und trägt zum Verständnis des Folgenden nichts weiter bei. Es genügt, das Resultat dieser Rechnungen anzugeben:

$$m_a = \sum_{g=1}^{n}\frac{\exp(\hat{\theta}_a-\hat{\kappa}_g)}{1+\exp(\hat{\theta}_a-\hat{\kappa}_g)}, \quad a=1,\ldots,m \tag{3.18}$$

$$n_g = \sum_{a=1}^{m}\frac{\exp(\hat{\theta}_a-\hat{\kappa}_g)}{1+\exp(\hat{\theta}_a-\hat{\kappa}_g)}, \quad g=1,\ldots,n. \tag{3.19}$$

Es ist nicht möglich, diese Gleichungen explizit nach den θ_a und κ_g aufzulösen, so dass eine numerische Lösung gefunden werden muß. Programme für die Lösung der Gleichung sind verfügbar. Die Schätzungen haben eine Reihe von wünschenswerten Schätzungen, insbesondere die der *Suffizienz*; dies bedeutet, dass sie alle Informationen über die Parameter, die in den Daten vorhanden sind, enthalten.

Die Lösung dieser Gleichungen ist numerisch aufwändig, allerdings liegen mittlerweile frei verfügbare Programme vor, die jedem Anwender zugänglich sind, s. https://cran.r-project.org/web/packages/eRm/eRm.pdf.

3.4 Die Bewertung von Schulleistungen

Es ist bereits argumentiert worden, dass eine Benotung auf der Basis einer an die Punkteverteilung angepasste Normalverteilung nicht zu rechtfertigen ist, weil Noten erzeugt werden, die nicht dem objektiven Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler entsprechen. Das Rasch-Modell hat aber die Eignschaft der *spezifischen Objektivität*, d.h. die Personenparameter θ_a und die Schwierigkeitsparameter κ_g können unabhängig voneinander geschätzt werden. Es ist ebenfalls argumentiert worden, dass die Fähigkeiten z.B. der Gymnasialschüler insgesamt eher einer Log-Normalverteilung als einer Normalverteilung folgen. Die Frage, welche der beiden Verteilungen denn nun wirklich die richtige ist, muß letztlich empirisch entschieden werden, aber vermutlich ist es gar nicht notwendig, sich hierüber große Gedanken zu machen, zumal es Fälle gibt, bei denen die Gauß- und die Log-Normalverteilungen einander so ähnlich sind, dass eine empirische Entscheidung kaum möglich ist. Das Rasch-Modell macht es andererseits möglich, anhand großer Stichproben (wie sie in PISA-Untersuchungen anfallen) die Schwierigkeitsparameter von Aufgaben zu bestimmen. Es sind Werte auf derselben Skala, auf der auch die Personenparameter θ_a liegen. Über die κ_g lassen sich nun die Noten definieren, nach Maßgabe einer allgemeinen Diskussion über das, was die Noten 'sehr gut', 'gut', etc bedeuten sollen. Dies bedeutet, dass für jede Altersgrupppe eine Schwierigkeitsskala mit κ-Werten aufgestellt wird derart, dass ein geschätzter θ_a-Wert zwischen κ_2 und κ_1 ein 'sehr gut' bedeutet, ein Wert θ_a zwischen κ_2 und κ_3 ein 'gut', etc. Die θ_a-Werte werden für alle Schüler $a = 1, \ldots, m$ gemäß (3.18) und (3.19) geschätzt. Da das oben genannte Programm eRm (extended Rasch-model) auf jedem Rechner läuft, ist die Schätzung der θ_a kein größeres Problem als das Anpassen einer Normalverteilung.

Die Abbildung der θ_a-Werte auf die Notenskala ist natürlich stetig und hat die Form $y_a = \alpha\theta_a + \beta$, $1 \leq y_a \leq 5$; auf diese Weise sind alle Zwischennoten möglich.

4 Anhang

4.1 Zur Gauß-Verteilung

Die Normal- oder Gauß-Verteilung ist durch die Funktion[10]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \tag{4.1}$$

definiert. $\mu = \mathbb{E}(X)$ ist der *Erwartungswert*, d.h. der Mittelwert über *alle möglichen Werte* x; normalerweise hat man nur eine Stichprobe von Messwerten, und

[10] exp steht für die e-Funktion: $\exp(x) = e^x$. e ist die Eulersche Zahl $e = 2.718281828459045\ldots$, Basis für den natürlichen Logarithmus.

der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_j \tag{4.2}$$

dient als Schätzung für μ. σ^2 ist die *Varianz* der x-Werte, d.h. der Mittelwert der *aller möglichen* quadrierten Abweichungen der x_j von μ. Eine Schätzung für σ^2 ist

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2. \tag{4.3}$$

σ bzw. s ist die *Standardabweichung* der x-Werte. σ^2 ist, wie σ, ein Maß für die Unterschiedlichkeit der x-Werte.

Geschichte: Bereits 1733 zeigte Abraham de Moivre[11] dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

von zufälligen Veränderlichen x_j gegen die Verteilung (4.1) strebt,wenn $n \to \infty$, wobei er aber nur den Spezialfall $x_j = \{0, 1\}$ für alle i betrachtete, d.h. die x_j können nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) zeigte 1782, dass die Aussage unter sehr allgemeinen Randbedingungen gilt, wenn die x_j nicht auf die Werte 0 oder 1 beschränkt sind (daher die Rede vom *de Moivre-Laplaceschen Grenzwertsatz*. 1809 publizierte Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) sein Werk *Theorie der Bewegung der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper*, in dem er die Normalverteilung ebenfalls definiert und sie im Zusammenhang mit der Methode der Kleinsten Quadrate diskutiert, die es gestattet, unbekannte Parameter (Konstante, die in die Definition von Funktionen eingehen) aus empirischen Daten zu schätzen. Der belgische Mathematiker Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796 – 1874) fand 1844, dass seine Messungen des Brustumfangs von Tausenden von Soldaten sehr gut mit der Funktion (4.1) übereinstimmten (d.h. die Häufigkeiten der verschiedenen Brustumfänge ließen sich durch diese Funktion gut beschreiben), und machte analoge Beobachtungen in anderen biologischen Bereichen; man vermutet, das der Ausdruck *Normalverteilung* auf Quetelet zurückgeht; (4.1) beschreibt demnach "normalerweise" die Häufigkeiten verschiedener Ausprägungen von Merkmalen. Der Ausdruck $n \to \infty$ bedeutet für die praktische Anwendung, dass n zwar endlich, aber "groß" ist, und ein Wert von $n > 30$ liefert oft schon eine gute Approximation der unbekannten Verteilung durch Normalverteilung. Dieser Sachverhalt erklärt die Bedeutung der Normal- oder Gauß-Verteilung.

[11] Abraham De Moivre (1667 – 1754), französischer Mathematiker

4.2 Simulation log-normalverteilter zufälliger Variablen

Zur Simulation log-normalverteilter zufälliger Veränderlicher (rlnorm in R): Es sei X log-normalverteilt; dann hat X den Erwartungswert und die Varianz

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}, \quad Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1. \tag{4.4}$$

Zur Abkürzung werde $m = \mathbb{E}(X)$ und $s = \sqrt{Var(X)}$ gesetzt. Offenbar gilt $s^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$.

Der Aufruf von rlnorm erfordert die Eingabe von n, der Anzahl der Fälle (hier: $n = 30$ = Klassengröße, die Übereinstimmung mit dem maximal erreichbaren Score 30 ist Koinzidenz, so wie die Werte meanlog und sdlog. meanlog ist ein Loktions- und sdlog ist ein Formparameter (location, shape). Die Bemerkungen im Text zu rlnorm sind etwas irreführend, deshalb hier eine Erläuterung. Erwünscht ist die Eingabe von μ und σ. Bei einer Simulation gibt man aber $\mathbb{E}(X)$ und s vor; man muß μ und σ also ausrechnen. Aus (4.4) folgt

$$\frac{s^2}{m^2} = e^{\sigma^2} - 1 \Rightarrow e^{\sigma^2} = 1 + \frac{s^2}{m^2},$$

woraus

$$\sigma = \sqrt{\log(1 + s^2/m^2)} \quad \text{(shape)} \tag{4.5}$$

folgt.

Weiter gilt

$$m^2 = e^{2\mu}e^{\sigma^2} = e^{2\mu}(1 + s^2/m^2),$$

woraus sich

$$\frac{m^2}{1 + s^2/m^2} = e^{2\mu} \Rightarrow e^{\mu} = \frac{m}{\sqrt{1 + s^2/m^2}}$$

so dass

$$\mu = \log\left[\frac{m}{1 + \frac{s^2}{m^2}}\right] \quad \text{(location)} \tag{4.6}$$

folgt.

Literatur

[1] Aitchinson, J. Brown, J.A.C.: The Lognormal distribution. Cambridge 1963

[2] Billingsley, P.: Probability and Measure. New York 1979

[3] Bleher, C.: Nicht so viele Einser, bitte!
http://www.sueddeutsche.de/karriere/kritik-an-guten-noten-nicht-zu-viele-einser-bitte-1.592366

[4] Dorfman, D.D. (1978) The Cyril Burt Question: New Findings. *Science*, 201 (4362), 1177 – 1186

[5] Koch, A.L. (1966) The Logarithm in Biology. 1. Mechanisms Generating the Log-Normal Distribution Exactly. *Journal of Theoretical Biology*, 12, 276–219

[6] Limpert,E., Stahel, E.A., Appt, M.: Log-normal distributions across the sciences. *Biosciences*, 2008, 51(5), 341–352

[7] Limpert, E., Stahel, W.A. (2011) Problems with using the normal distribution – and ways to improve quality and efficiency of data analysis. *PLoS One*, 6(7), 1 – 8

[8] McNemar, Q.: The Revision of the Stanford-Binet Scale. An Anlysis of the Standardization Data. . Houghton Miffin, Boston 1942

[9] Rasch, G.: Probabilistic Models for some intelligence and attainment tests. The Danish Institute of Educational Research, Copenhagen, 1960

[10] Rasch, G. (1961) On general laws and the meaning of measurement in psychology. The Danish Institute of Educational Research, Copenhagen.

[11] Steyr, R. Eid, M.: Messen und Testen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1993

[12] Sun, K. (2004) Explanation of Log-Normal Distributions and Power-Law Distributions in Biology and Social Science.
$http://guava.physics.uiuc.edu/\ nigel/courses/569/Essays_2004/files/sun.pdf$

[13] Thomas, H. (1982) IQ, Interval Scales, and Normal Distributions. *Psychological Bulletin*, 91(1), 198–202

[14] Tversky, A., Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 185, 1124–1131

[15] Yule, G.U., Kendall, M.G.: An Introduction to the Theory of Statistics. Griffin, London 1937

Index