

Probeklausur zur Veranstaltung

Multivariate Verfahren (WS 2016/17)

1. **Aufgabe:** Die multivariate Statistik basiert im Wesentlichen auf Anwendungen von Theoremen der Linearen Algebra, und ein grundlegender Begriff der Linearen Algebra ist der der Linearkombination von Vektoren. Für Linearkombinationen gilt

- (a) Die Vektoren werden so kombiniert, dass man ein Lineal an die Kombination legen kann.
- (b) Als Repräsentation psychischer Phänomene verfehlt, da diese sich nicht mit Faktoren multiplizieren und addieren lassen.
- (c) Definiert als $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{x}_i$, \mathbf{y}, \mathbf{x}_i n -dimensionale Vektoren, $a_i \in \mathbb{R}$.
- (d) Als Machination des tabularen Verstandes (Hegel) sind Linearkombinationen Ausdruck eines verdinglichten Ganzheitsbegriffs.

2. **Aufgabe:** Linearkombinationen bedeuten die Transformation eines Vektors \mathbf{x} in einen Vektor \mathbf{y} , wie anhand der Matrixschreibweise für Linearkombinationen deutlich wird: Ist $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ eine Matrix mit den m -dimensionalen Spaltenvektoren \mathbf{a}_j , ist ist

$$\mathbf{y} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = A\mathbf{x},$$

und der n -dimensionale Vektor \mathbf{x} wird in den m -dimensionalen Vektor \mathbf{y} transformiert. Nun gelte insbesondere $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x}' A' A \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$, wobei A eine $(n \times n)$ -Matrix ist.

- (a) Die Beziehung $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ impliziert $A' A = I$.
- (b) Diese Beziehung kann nur gelten, wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} einen rechten Winkel bilden, also orthogonal sind.
- (c) Diese Beziehung kann nur gelten, wenn A orthonormal ist.
- (d) Voraussetzung für diese Beziehung ist, dass \mathbf{x} und \mathbf{y} parallel sind.

3. **Aufgabe:** Es sei \mathbf{x} ein m -dimensionaler Vektor, und \mathbf{y} sei ein n -dimensionaler Vektor. Das dyadische Produkt $\mathbf{x}\mathbf{y}'$ ist eine $(m \times n)$ -Matrix. Was läßt sich über den Rang dieser Matrix aussagen?

- (a) Der Rang ist gleich der kleineren Seite von $\mathbf{x}\mathbf{y}'$.
- (b) Der Rang ist proportional zur Anzahl der Elemente in $\mathbf{x}\mathbf{y}'$.

- (c) Der Rang hängt von der Aussagekraft der Elemente von \mathbf{xy}' ab.
- (d) Der Rang ist stets gleich 1.
4. **Aufgabe:** Ein weiterer, für die multivariate Analyse zentraler Schlüsselbegriff ist der des Skalarprodukts $\mathbf{x}'\mathbf{y}$ zweier Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} . Für diesen Begriff gilt
- (a) $\mathbf{x}'\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \theta$ dann und nur dann, wenn $\theta \neq 0$.
- (b) $\mathbf{x}'\mathbf{y}$ ist die Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} , sofern die Vektoren dieselbe Dimensionalität haben.
- (c) Er ist ein Abfallprodukt bei der Produktion von Talarerzeugnissen, das sich als Antidotum gegen die ungezügelt Verwendung des dyadischen Produkts erwies.
- (d) Ergibt eine $(n \times n)$ -Matrix von Skalaren mit dem Rang 1.
5. **Aufgabe:** Die Komponenten der m -dimensionalen Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} seien Messwerte für zwei Variable X und Y , sind also zufällige Variablen.
- (a) $\mathbf{x}'\mathbf{y}$ ist gleich der Korrelation zwischen den Variablen.
- (b) $\mathbf{x}'\mathbf{y} = 1$ genau dann, wenn $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$.
- (c) $\mathbf{x}'\mathbf{y} = \cos \theta$ genau dann, wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} parallel sind.
- (d) Die Korrelation r_{xy} zwischen X und Y ist gleich $\cos \theta = \mathbf{x}'\mathbf{y}/(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|)$.
6. **Aufgabe:** Es sei $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ eine Menge von n -dimensionalen Vektoren. Die Frage ist, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind.
- (a) Die \mathbf{x}_j , $1 \leq j \leq n$, sind linear unabhängig genau dann, wenn sie orthogonal sind.
- (b) Die \mathbf{x}_j sind linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht kollinear sind.
- (c) Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn $\sum_j a_j \mathbf{x}_j = \vec{0}$ dann und nur dann, wenn $a_j = 0$ für alle j .
- (d) Da $a_j = 0$ für alle a_j stets eine Lösung für die Gleichung $\sum_j a_j \mathbf{x}_j = \vec{0}$ ist, hängt das Merkmal der linearen Unabhängigkeit vom Kontext ab, innerhalb dessen die \mathbf{x}_j verwendet werden.
7. **Aufgabe:** Es sei A wieder eine $(n \times n)$ -Matrix und es sei das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \vec{0}$ gegeben; gesucht sind Vektoren \mathbf{x} , die dieser Gleichung genügen. Unter welchen Bedingungen ist der Vektor $\mathbf{x} = \vec{0}$ die einzige Lösung des Systems? (Hinweis: bedenken Sie, dass der Ausdruck $A\mathbf{x}$ stets für eine Linearkombination steht.)
- (a) Wenn A eine symmetrische Matrix ist.

- (b) Wenn A eine Rotationsmatrix ist.
- (c) Wenn A das Kreuzprodukt einer beliebigen $(m \times n)$ -Matrix X ist, wenn also $A = X'X$ ist.
- (d) Wenn A vollen Rang hat, wenn also $\text{rg}(A) = n$ gilt.
8. **Aufgabe:** Das dyadische (auch: äußere) Produkt \mathbf{xy}' zweier Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y}
- (a) kann nur berechnet werden, wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} dieselbe Dimensionalität haben.
- (b) ist eine Matrix $\mathbf{xy}' = (x_i y_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.
- (c) Ist eine Matrix genau dann, wenn die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} dyadische Vektoren sind, wenn deren Komponenten also nur die Werte 0 oder 1 annehmen können.
- (d) Für den Fall, dass sich bei der Bildung dieses Produkts eine Matrix ergibt, hat sie den Rang $r = \min(m, n)$.
9. **Aufgabe:** Mit dem Begriff des Vektorraums oder des Teilraums eines Vektorraums werden bestimmte Merkmale von Mengen von Vektoren charakterisiert. Welche Aussage ist korrekt?
- (a) Der Ausdruck *Vektorraum* legt schon nahe, dass die Vektoren raumhaft sein müssen, also nicht alle zu einem Punkt komprimiert sein dürfen (d.h. es darf nicht $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$, $a \in \mathbb{R}$, mit $a \rightarrow 0$ gelten).
- (b) Eine Menge $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ist ein Vektorraum, wenn die \mathbf{x} in alle Richtungen des Raumes zeigen können, z.B. wenn $\|\mathbf{x}\| = 1$ für alle \mathbf{x} , denn dann liegen die Endpunkte der \mathbf{x} auf einer Hyperkugel.
- (c) $V_n = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ist ein Vektorraum, wenn irgendwelche Linearkombinationen von Vektoren aus V_n wieder Elemente von V_n sind.
- (d) Da jeder Vektor in einem Vektorraum liegt ist der Begriff des Vektorraums eine redundante Abstraktion des unmittelbar Gegebenen und dient nur der szientifischen Verspiegelung der Realität als modus operandi bürgerlicher Intransigenz.
10. **Aufgabe:** Jeder Vektorraum enthält unendlich viele Vektoren¹, da jede Linearkombination $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^p a_j \mathbf{x}_j$ von endlich vielen Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ aus dem Raum wieder in diesem Raum liegt und die Koeffizienten a_j beliebig aus \mathbb{R} gewählt werden können. Was versteht man unter einer *Basis* eines Vektorraums?
- (a) Eine Plattform, d.h. eine Ebene im Vektorraum, auf der alle Vektoren des Vektorraums senkrecht stehen.

¹Überabzählbar viele, d.h. mehr als es natürliche Zahlen 1, 2, 3... gibt – aber darauf muß hier nicht eingegangen werden.

- (b) Die einzige Menge von Vektoren, aus der sich alle Vektoren des Vektorraums als Linearkombination gewinnen lassen. \square
- (c) Jede Menge $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$ von linear unabhängigen Vektoren aus dem Vektorraum, die die Erzeugung aller Vektoren \mathbf{x} des Raums als Linearkombination $\mathbf{x} = a_1\mathbf{b}_1 + \dots + a_r\mathbf{b}_r$ erlaubt, wobei r der Rang des Vektorraums ist. $\square_{\mathbf{x}}$
- (d) Die Teilmenge der reellen Zahlen, aus der alle Vektoren des Vektorraums bestehen. \square
11. **Aufgabe:** Es sei $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ eine $(m \times n)$ -Matrix.
- (a) Der Zeilenrang von X ist ungleich dem Spaltenrang von X , wenn weder eine $(m \times r)$ -Matrix U noch eine $(r \times n)$ -Matrix V existieren derart, dass $X = UV$. \square
- (b) Für den Rang r von X gilt stets $r \leq \min(m, n)$. $\square_{\mathbf{x}}$
- (c) X , A und B seien Matrizen derart, dass $X = AB$. Dann gilt $\text{rg}(X) \geq \max(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$. \square
- (d) Der Zeilenrang von X ist ungleich dem Spaltenrang, wenn die Zeilen- und die Spaltenvektoren in Teilräumen mit verschiedener Dimensionalität liegen. \square
12. **Aufgabe:** M sei eine $(n \times n)$ -Matrix, für die $M' = M$ gilt. M definiert ein Ellipsoid,
- (a) denn der Plot der Fälle in einem durch die gemessenen Variablen definierten Koordinatensystem liefert stets eine elliptische Punktwolke. \square
- (b) denn $\mathbf{x}'M\mathbf{x} = k$ ist die Formel für ein Ellipsoid. $\square_{\mathbf{x}}$
- (c) Die Behauptung, dass eine symmetrische Matrix ein Ellipsoid definiert, kann nur gelten, wenn M eine Diagonalmatrix ist. \square
- (d) Die Behauptung mag formal korrekt sein, aber der Bezug zu realen Daten ist unklar; die Zeiten, in denen Platon behaupten konnte, die Welt setze sich aus idealen Körpern zusammen, ist endgültig vorbei. \square
13. **Aufgabe:** Es gelte $\mathbf{x}'M\mathbf{x} = k$, M symmetrisch, und $\mathbf{y}'\Lambda\mathbf{y} = k$, Λ eine Diagonalmatrix, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und es existiere eine Rotationsmatrix T mit $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$.
- (a) T existiert nur, wenn sowohl die \mathbf{x} wie die \mathbf{y} orthogonal sind. \square
- (b) Da $\mathbf{x}'M\mathbf{x} = \mathbf{y}'T'MT\mathbf{y} \Rightarrow T'MT = \Lambda$ und da T notwendigerweise orthonormal ist, kann T aus M bestimmt werden. $\square_{\mathbf{x}}$

- (c) Die meisten Matrizen sind nicht symmetrisch, – die Neigung von Mathematikern, sich auf Spezialfälle zu konzentrieren, ist für die Anwendungen in der Empirie eher störend. \square
- (d) Man muß *voraussetzen*, dass T eine Matrix von Eigenvektoren von M ist. Gilt diese Voraussetzung nicht, so verliert die obige Aussage ihren Sinn. \square
14. **Aufgabe:** $T'MT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und T eine Rotation impliziert, dass T die Matrix der Eigenvektoren von M ist.
- (a) X sei eine spaltenstandardisierte ($m \times n$)-Datenmatrix, $M = X'X$. Dann ist $L = XT$ die orthogonale Matrix, deren Spaltenvektoren die Koordinaten der Fälle auf hypothetischen latenten Dimensionen enthalten. \square
- (b) T ist die Matrix der Ladungen der Variablen (\rightarrow Spalten von X). \square
- (c) T ist ebenfalls die Matrix der Eigenvektoren von XX' . \square
- (d) Ist T eine beliebige orthonormale ($n \times n$)-Matrix, so kann sie als Matrix der Eigenvektoren einer gegebenen Matrix $C = X'X$ verwendet werden. \square
15. **Aufgabe:** Es sei $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ eine ($m \times n$)-Matrix. Gesucht ist eine Basis $\{\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_r\}$ mit $r \leq \min(m, n)$ für die Spaltenvektoren von X . Es wird der Ansatz $X = LT'$ gemacht mit $L = [\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_r]$ und postuliert, dass die \mathbf{L}_k orthogonal sind.
- (a) Es sei $\lambda_1 = \mathbf{L}'_1 \mathbf{L}_1 \geq \dots \geq \lambda_r = \mathbf{L}'_r \mathbf{L}_r$ und der Satz von Courant-Fischer impliziert, dass λ_1 der maximal mögliche Wert für $\mathbf{L}'_1 \mathbf{L}_1$ ist, wenn T die Matrix der Eigenvektoren von $X'X$ ist. \square
- (b) Es gilt $X'X = TL'LT' = T\Lambda T'$, Λ eine Diagonalmatrix nur dann, wenn X den vollen Rang $r = \min(m, n)$ hat. \square
- (c) L muß eine Rotationsmatrix sein, damit XX' interpretierbar ist. \square
- (d) Die $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_r$ sind die Eigenvektoren von $X'X$. \square
16. **Aufgabe:** Es sei X eine ($m \times n$)-Datenmatrix, und $X = Q\Lambda^{1/2}T'$ sei die zugehörige SVD (Singularwertzerlegung).
- (a) Da $XT = Q\Lambda^{1/2} = L$ bewirkt T eine Transformation der Hauptachsen der durch X gegebenen, orientierten Punktekonfiguration der Fälle in eine achsenparallele Konfiguration. \square
- (b) T ist die Matrix der Ladungen der Variablen nur dann, wenn sich zeigen läßt, dass T orthogonal ist. \square
- (c) X sei spaltenstandardisiert. Dann ist $\frac{1}{n}XX'$ die Matrix der Korrelationen zwischen den Fällen.² \square

²Achten Sie auf die Standardisierung: es wurde *spaltenstandardisiert*!

- (d) Voraussetzung für die Berechnung der SVD für X ist, dass X zumindest spaltenzentriert ist.
17. **Aufgabe:** Ein Kunsttheoretiker hat hundert Gemälde nach den Kriterien K_1, \dots, K_n auf einer Ratingskala jeweils von 1 bis 7 beurteilt und will nun die Struktur seiner Urteil mit einer PCA erkunden. Er berechnet die SVD $X = Q\Lambda^{1/2}T'$ seiner Datenmatrix (Zeilen: Gemälde, Spalten: Kriterien K_j , $j = 1, \dots, n$).
- (a) Die Ladungen der Kriterien sind durch $A = T\Lambda^{1/2}$ gegeben.
- (b) Die Ladungen sind durch $A = Q\Lambda^{-1/2}$ gegeben.
- (c) Die Faktorscores der Gemälde sind durch $L = Q\Lambda^{-1/2}$ gegeben.
- (d) Die Faktorscores sind nicht berechenbar, da Gemälde keine Personen sind.
18. **Aufgabe:** Es wird noch einmal die Datenmatrix des Kunsttheoretikers betrachtet:
- (a) Die Ladungen der Kriterien entsprechen Korrelationen zwischen jeweils einem Kriterium K_j und einer latenten Variable \mathbf{q}_k .
- (b) Die Ladungsvektoren für ein Kriterium sind wegen $A = T\Lambda^{1/2}$ nur Längenskalierte Eigenvektoren und haben, da T ja eine Rotationsmatrix ist, keine inhaltliche Bedeutung.
- (c) Der Ausdruck 'Ladung' ist veraltet, da obsolet.
- (d) Die Matrix der Ladungen ergibt sich als dyadisches Produkt des k -ten Spaltenvektors \mathbf{q}_k und j -ten Spaltenvektors von T .
19. **Aufgabe:** Für die übliche Datenmatrix X gelte $XT = L$.
- (a) Die Spaltenvektoren von L sind Linearkombinationen der Spaltenvektoren von X .
- (b) Das Element x_{ij} (i -ter Fall, j -te Variable) ist das Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors von L mit dem j -ten Spaltenvektor von T' unter der Voraussetzung, dass höchstens eine der Matrizen L und T orthogonal ist.
- (c) Der Versuch, die Messwerte x_{ij} als *Skalarprodukt*
- $$x_{ij} = a_{1j}q_{i1} + a_{2j}q_{i2} + \dots + a_{pj}q_{ip}$$
- darzustellen, scheitert i.A. an der Mehrdimensionalität der Messungen.
- (d) Da $XT = L$ gelten soll, folgt durch Multiplikation von links mit X' die Beziehung $X'XT = X'L$ und durch Multiplikation von links mit $(X'X)^{-1}$ folgt $T = (X'X)^{-1}X'L$. Die Matrix T ist also eine Kleinst-Quadrat-Schätzung für L .

20. **Aufgabe:** Es sei $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ eine $(m \times n)$ -Matrix, und die Fälle (\rightarrow Zeilen von X) bilden eine orientierte, dh nicht achsenparallele Punktekonfiguration. Für die Rotation auf ein achsenparalleles Koordinatensystem gilt
- (a) Die Rotation bedeutet den Übergang von X zu einer Matrix $L = XT$, wobei L eine orthogonale Matrix ist. **x**
 - (b) Die Rotation setzt die vorherige Bestimmung des Rotationswinkels voraus.
 - (c) Rotieren heißt nicht analysieren.
 - (d) Man sollte nur rotieren, wenn dabei die Invarianz der Skalarprodukte gesichert ist.
21. **Aufgabe:** X sei wie in der vorangegangenen Aufgabe definiert.
- (a) Die Rotationsmatrix T ist durch die Matrix der Eigenvektoren von $X'X$ gegeben. **x**
 - (b) Die Rotationsmatrix ist durch die Matrix der Eigenvektoren von XX' gegeben.
 - (c) Durch die Rotation verändern sich auch die Eigenwerte von $X'X$.
 - (d) Werden die Spaltenvektoren von X rotiert, so muß man anschließend auch die Spaltenvektoren von L rotieren.
22. **Aufgabe:** X sei wieder eine $(m \times n)$ -Datenmatrix und es gelte $XT = L$, L die Matrix der Koordinaten der Fälle auf den latenten Dimensionen.
- (a) $\mathbf{L}'_j \mathbf{L}_j = \lambda_j$ entspricht der Varianz der Koordinaten der Fälle auf der j -ten latenten Dimension. **x**
 - (b) Die Eigenwerte λ_j sind interessante Beiwerte der Eigenvektoren von $X'X$.
 - (c) Durch Rotation der Spaltenvektoren von X verändern sich auch die Eigenwerte von $X'X$.
 - (d) Die Spaltenvektoren von L sind Kodierungen der Spalten von X .
23. **Aufgabe:** Es sei X eine spaltenstandardisierte $(m \times n)$ -Datenmatrix mit der SVD $X = Q\Lambda^{1/2}T'$. $A = T\Lambda^{1/2}$ ist die Matrix der Ladungen der Variablen (Zeilen \rightarrow Variablen, Spalten \rightarrow latente Dimensionen).
- (a) $R = AA'$, d.h. $r_{jk} = \sum_i a_{ij}a_{ik}$ **x**
 - (b) $R = A'A$, d.h. r_{jk} ist das Skalarprodukt zwischen der j -ten Spalte von A und der k -ten Spalte von A .
 - (c) A ist *orthonormal*.
 - (d) A ist symmetrisch.

24. **Aufgabe:** Die durch eine PCA bestimmten latenten Dimensionen für eine Datenmatrix X sind durch Rotation aus den gemessenen Variablen hervorgegangen; die Orthogonalität der latenten Variablen bedeutet, dass sie als unkorreliert interpretiert werden können. Welche Aussage über eine weitere Rotation ist korrekt?
- (a) Jede Rotation zerstört die Unabhängigkeit, denn die PCA liefert die einzigen unkorrelierten latenten Dimensionen.
 - (b) Eine Rotation *entweder* der Achsen für die Fälle *oder* der Achsen für die Variablen ist möglich, nur geht der Bezug zwischen Fällen und Variablen (SVD) verloren.
 - (c) Eine Rotation ist möglich, wenn es sich um eine Varimax-Rotation handelt.
 - (d) Da Rotationen willkürlich sind, tragen sie ein unerlaubtes Element der Subjektivität in die Interpretation der latenten Dimensionen.
25. **Aufgabe:** Für Faktorenanalysen ist es wichtig, die Kommunalität der untersuchten Variablen zu bestimmen.
- (a) Die Kommunalität ist ein Maß für die Enge der Beziehung zwischen statistischen Faktoren und dem realen Leben.
 - (b) Die Kommunalität einer empirischen Variablen ist das Komplement zum je eigenen dieser Variablen.
 - (c) Die Kommunalität einer Variablen ist der Anteil der Varianz dieser Variablen, der sich auf die gemeinsamen Faktoren zurückführen läßt.
 - (d) Die Kommunalität eines Faktors gibt an, wieviel der Faktor mit den anderen Faktoren gemein hat.
26. **Aufgabe:** Für die $(m \times n)$ -Matrix X (spaltenstandardisiert) sollen die latenten Dimensionen für die Variablen mittels PCA abgeschätzt werden.
- (a) Die Anzahl der kleinen Eigenwerte entspricht der Anzahl unabhängiger latenter Dimensionen, da kleine Eigenwerte kleine Korrelationen zwischen den Variablen bedeuten.
 - (b) Die Anzahl der großen Eigenwerte entspricht der Anzahl der latenten Dimensionen, da die Eigenwerte der Varianz der Koordinaten der Fälle auf der entsprechenden latenten Dimension entsprechen.
 - (c) Je kleiner die Eigenwerte, desto größer die erklärte Varianz.
 - (d) Der Quotient von Eigen- und Anderwerten reflektiert die innere Validität der Daten.
27. **Aufgabe:** Die Matrix X sei wie in der vorangegangenen Aufgabe definiert. Es wird eine PCA für X berechnet und dabei der Scree-Test durchgeführt.

- (a) Scree ist eine englische Verballhornung des baskischen Ausdrucks *scaix* für Geröllhänge in den nördlichen Ausläufern der Pyrenäen und ist ein Maß für die Schutthaftigkeit der Eigenwerte. □
- (b) Einem bekannten Kriterium entsprechend können alle Eigenwerte größer als 1 bedenkenlos als Indikatoren für sinnhafte latente Dimensionen gewertet werden. □
- (c) Bevor Eigenwerte größer als 1 als indikativ für die Existenz latenter Variablen interpretiert werden sollte der Sphärizitätstest durchgeführt werden. □x
- (d) Der Ausdruck 'scree' für Geröllhalden ist irreführend, da er einerseits metaphorisch und andererseits von autoassoziativer Seduktivität ist, denn Berge sind konkret und latente Dimensionen sind abstrakt. □

28. **Aufgabe:** X sein eine $(m \times n)$ -Prädiktormatrix und eine Variable Y soll durch die Spaltenvektoren von X vorhergesagt werden (multiple Regression), d.h. es soll $\mathbf{y} = X\mathbf{b} + \mathbf{e}$ gelten, \mathbf{b} der Vektor der Regressionsgewichte. Da $X'X = T\Lambda T'$, T die Matrix der Eigenvektoren von $X'X$ und Λ die Diagonalmatrix der zugehörigen Eigenwerte, folgt

$$(X'X)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{t}_k \mathbf{t}_k'}{\lambda_k}, \quad T = [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n]$$

Für die Matrix $Var(\hat{\mathbf{b}})$ der Varianzen und Kovarianzen zwischen den Schätzungen gilt bekanntlich die Beziehung $Var(\hat{\mathbf{b}}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$, σ^2 die Varianz der Fehler e .

- (a) Korrelationen zwischen den Prädiktoren (Spalten von X) bedeuten die Existenz kleiner Eigenwerte und daher große Fehler bei den Schätzungen $\hat{\mathbf{b}}$. □x
- (b) Da σ^2 nicht bekannt ist, kann man über die Varianz der Schätzung \mathbf{b} nichts aussagen. □
- (c) Korrelationen zwischen den Prädiktoren sind gut, weil sie zeigen, dass die Prädiktoren substantiell dasselbe voraussagen. □
- (d) Da \mathbf{b} mit der Methode der Kleinsten Quadrate geschätzt werden, ist $\hat{\mathbf{b}}$ eh' das Beste, was man man haben kann. Betrachtungen über die Varianz der Schätzung sind redundant und schmeicheln nur der mathematischen Eitelkeit der Statistiker. □

29. **Aufgabe:** Bei der multiplen Regression bewirken Korrelationen zwischen den Prädiktoren verzerrende Effekte bei Vorhersagen der abhängigen Variablen (also verzerrende Aussagen zB in der Diagnostik). In welchem Sinne hilft hier die PCA-Regression?

- (a) Durch Regression auf die Hauptachsen kann man die Hauptachsen des durch $X'X$ definierten Ellipsoids besser vorhersagen.
- (b) Die Principal Components sind übersichtlicher als die gegebenen Prädiktoren.
- (c) Die PCA-Regression hilft gar nicht, weil die PCs ja aus den Daten errechnet werden und bestenfalls als des Kaisers neue Kleider gesehen werden können.
- (d) Da stets $X = Q\Lambda^{1/2}T'$ gilt, kann X durch die orthogonale Matrix Q ersetzt werden und der Vektor \mathbf{b} der Regressionsgewichte durch den Vektor $\mathbf{u} = \Lambda^{1/2}T'\mathbf{b}$.
30. **Aufgabe:** Welche der folgenden Aussagen zur PCA-Regression ist korrekt?
- (a) Da $A = T\Lambda^{1/2}$, folgt $\mathbf{u} = A'\mathbf{b}$, aber \mathbf{u} ist nur berechenbar, wenn A symmetrisch ist.
- (b) Da X m Zeilen hat, muß auch \mathbf{u} m Zeilen haben.
- (c) Da $X = Q\Lambda^{1/2}T'$, kann X durch $X_r = Q_r\Lambda_r^{1/2}T'_r$, $r < \min(m, n)$ approximiert werden, man kann eventuell weniger Prädiktoren verwenden als ursprünglich gegeben sind.
- (d) Da T eine Rotationsmatrix ist, gehört die PCA-Regression zu den abgedrehten Verfahren in der multivariaten Statistik.
31. **Aufgabe:** Da die PCA-Regression ursprüngliche Prädiktoren durch berechnete Prädiktoren $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ (Spaltenvektoren von Q) ersetzt,
- (a) bedeutet die PCA-Regression stets einen Verlust des Realitätsbezuges.
- (b) kann man sicher sein, dass man unkorrelierte Prädiktoren erhält, auch wenn diese Prädiktoren Konstrukte und nicht direkt gemessene Variablen sind.
- (c) muß man feststellen, dass es keine richtige Regression in der falschen gibt.
- (d) die neuen Regressionsgewichte u_1, \dots, u_n beziehen sich zwar auf unabhängige Prädiktoren, haben aber keine biasfreien Schätzungen.
32. **Aufgabe:** Sie haben 70 klinische Psychologen um eine Evaluation der Wirksamkeit der Verhaltenstherapie bei posttraumatischen Störungen von Bundeswehrsoldaten befragt. Die Antworten auf die 30 Items des Fragebogens bestanden aus Ratings auf einer 1 bis 7 Skala. Die PCA der Daten zeigt, dass es drei Items gibt, deren repräsentierende Vektoren paarweise orthogonal sind, und der Scree-Test legt die Existenz dreier latenter Variablen nahe.

- (a) Man kann die drei Items zur Definition von drei latenten Variablen, die die Dimensionen des Fragebogens ausmachen, wählen.
- (b) Man kann die drei Items nur dann mit den latenten Dimensionen identifizieren, wenn die korrespondierenden Vektoren mit den Hauptachsen des Ellipsoids der Fälle (hier: der klinischen Psychologen) übereinstimmen.
- (c) Die drei Items definieren nur dann latente Dimensionen, wenn es klinische Psychologen gibt, deren Vektoren mit denen der Items orientierungsmäßig übereinstimmen.
- (d) Die korrekte ganzheitliche Beurteilung einer posttraumatischen Störung hängt nicht von gerade mal drei PCA-Dimensionen ab.
33. **Aufgabe:** Es werde noch einmal das Ergebnis der in der vorangegangenen Aufgabe beschriebenen Evaluation der Verhaltenstherapie betrachtet. Demnach kann man die Hypothese aufstellen, dass der Therapieerfolg Y als Funktion der drei Dimensionen des Fragebogens vorhergesagt werden kann, d.h. man kann die lineare Regression $\mathbf{y} = b_1\mathbf{L}_1 + b_2\mathbf{L}_2 + b_3\mathbf{L}_3 + \mathbf{e}$ betrachten.
- (a) Für einen derartigen Test muß man mindestens sieben Dimensionen berücksichtigen, da die Ratingskalen sieben Stufen haben.
- (b) Als Validitätstest gut möglich, da die drei Prädiktoren ja unkorreliert sind, also keine Störeffekte aufgrund von Kollinearitäten zu erwarten sind.
- (c) Wie Dilthey schon gesagt hat, erlaubt die "öde Empirie" (Dilthey) einer Fragebogenuntersuchung keinen Zugang zur unendlichen Vielfalt posttraumatischer Störungen.
- (d) Der Regressionsansatz ist nur möglich, wenn die drei Dimensionen über das Kaiser-Kriterium abgesichert worden sind.
34. **Aufgabe:** Die Items des Fragebogens über die Wirksamkeit der Verhaltenstherapie seien in binäre Items umformuliert worden, d.h. man kann den Aussagen nur zustimmen oder sie ablehnen. Die PCA scheint jetzt für die 30 Items sieben statt nur drei latente Variable zu ergeben.
- (a) Bei binären Items werden mehr zufällige Entscheidungen getroffen, so dass die Varianz in den Daten erhöht wird, – das erhöht die Zahl der latenten Dimensionen.
- (b) Der Informationsgehalt der Antworten auf binäre Items ist konzentrierter als bei 7-stufigen Items, das erlaubt eine detailliertere Auffächerung der latenten Struktur psychotherapeutischer Effekte.
- (c) Binäre Items erfassen eher als mehrfach gestufte Items die nichtlinearen Interaktionen zwischen Patienten und Therapeuten und liefern deshalb eine höhere Anzahl von latenten Variablen.

- (d) Man kann vermuten, dass die Schwierigkeiten der Items verschieden sind, so dass die Randverteilungen für je zwei Items verschieden sind.
35. **Aufgabe:** Ein Problem bei der PCA ist die Abschätzung der Anzahl der latenten Dimensionen, die einem Datensatz (einer Matrix X) unterliegen.
- (a) Man muß nur den Scree-Test durchführen: dem Kaiser-Kriterium zufolge repräsentieren alle Eigenwerte kleiner als 1 nur "Rauschen" in den Daten.
- (b) Wenn die Daten multivariat normalverteilt sind, kann man einen F -Test auf Zufälligkeit der Varianzen der latenten Dimensionen durchführen.
- (c) Selbst wenn die wahre Korrelation zwischen allen Variablen gleich Null ist, erzeugen die Stichprobenfluktuationen in den Daten Stichprobenkorrelationen größer als 1, weshalb der Sphärizitäts-Test durchgeführt werden muß.
- (d) Die PCA ist eine rein deskriptive Methode, weshalb man die Ergebnisse interpretieren muß, ohne dabei statistische Tests zu verwenden.
36. **Aufgabe:** Es werden n Variable bei m Fällen gemessen. Jeder Fall gehört einer und nur einer Klasse \mathcal{C}_k an, $k = 1, \dots, 3$. Unter welchen Bedingungen erlaubt eine PCA auch eine Klassifikation der Fälle anhand der Koordinaten L der Fälle?
- (a) Nie, denn bei der Berechnung der Spaltenvektoren von L wird stets über die Klassen gemittelt.
- (b) Wenn den Klassen Cluster von Fällen entsprechen.
- (c) Wenn z.B. die Koordinaten der Fälle in der Klasse \mathcal{C}_k , $k = 1, 2, 3$, in einem Intervall I_{jk} der j -ten latenten Dimension liegen und die Anordnung dieser Intervalle auf den latenten Dimensionen für alle Dimensionen dieselbe ist.
- (d) Wenn es nur eine latente Dimension gibt, auf der sich die Klassen anordnen lassen.
37. **Aufgabe:** Die gemessenen Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ liegen in einem r -dimensionalen Teilraum des \mathbb{R}^m . Welches Kriterium hat Fisher (1936) formuliert, nach dem sich Vektoren \mathbf{y} finden lassen derart, dass die Projektion der \mathbf{x}_j auf \mathbf{y} eine maximale Trennung der Klassen \mathcal{C}_k ermöglicht?
- (a) Bei der Berechnung der Quadratsummen muß vorausgesetzt werden, dass die Prädiktoren multivariat normalverteilt sind.
- (b) Die Vektoren \mathbf{u} lassen sich nicht berechnen, wenn die zu den Klassen gehörenden Gruppen nicht linear trennbar sind.

- (c) Die Grundquoten für die Kategorien sind proportional zur Anzahl der latenten Dimensionen.
- (d) Die Quadratsumme der y -Werte $QS_{zw}(\mathbf{u})$ ist maximal relativ zur Quadratsumme der y -Werte $QS_{inn}(\mathbf{u})$, wobei $\mathbf{y} = X\mathbf{u}$, \mathbf{u} der Vektor, dessen Komponenten die Gewichtung der Prädiktoren ist.
38. **Aufgabe:** Fishers Lineare Diskriminanzanalyse (LDA) beruht auf dem Ansatz, einen Teilraum des von den Prädiktorvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ aufgespannten Vektorraums (der ist durch die lineare Hülle $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$ gegeben) zu bestimmen, in dem die Fälle als Gruppen mit minimaler Überlappung repräsentiert werden.
- (a) Ein großer Nachteil der LDA ist, dass der vom Verfahren bestimmte Teilraum nicht mehr, wie bei der PCA, rotiert werden kann, um eine bessere Diskriminanzleistung zu erzeugen.
- (b) Der Teilraum muß nicht mehr rotiert werden, weil die LDA so angelegt ist, dass die optimale Orientierung bestimmt wird.
- (c) Ist der gesuchte Teilraum 3-dimensional mit den latenten Dimensionen D_1, D_2, D_3 , so kann man zur Veranschaulichung die Konfiguration der Fälle in den Koordinatensystemen $D_1 \times D_2, D_1 \times D_3$ und $D_2 \times D_3$ betrachten. Damit die LDA als gelungen bezeichnet werden kann, müssen die Gruppen in allen diesen Koordinatensystemen als nicht überlappende Konfigurationen erscheinen.
- (d) Die LDA ist nur sinnvoll, wenn die Daten multivariat normalverteilt sind.
39. **Aufgabe:** Es sei W die Matrix der Varianzen und Kovarianzen "innerhalb" der Gruppen, B die entsprechende Matrix "zwischen" den Gruppen. Die dem in der vorangegangenen Aufgabe entsprechenden Vektoren \mathbf{u} ergeben sich als Lösung der Eigenvektorgleichung $W^{-1}B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$.
- (a) Die einzige Voraussetzung für die Berechenbarkeit der \mathbf{u} ist die Existenz der Inversen W^{-1} .
- (b) Die \mathbf{u} sind nur orthogonal, wenn $W^{-1}B$ symmetrisch ist.
- (c) Die Vektoren $\mathbf{y} = X\mathbf{u}$ mit den \mathbf{u} als Lösungen von $W^{-1}B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ sind nur orthogonal, wenn $W^{-1}B\mathbf{u}$ symmetrisch ist.
- (d) Die \mathbf{y} sind nur orthogonal, wenn die Gruppen linear trennbar sind.
40. **Aufgabe:** Abhängigkeiten zwischen Zeilen- und Spaltenkategorien einer Kontingenztabelle werden üblicherweise durch einen χ^2 -Test erfasst, der aber die Abhängigkeiten nicht im Detail reflektiert. Dieser Nachteil kann durch die Korrespondenzanalyse erfasst werden:
- (a) Die Korrespondenzanalyse ist eine PCA der Häufigkeiten n_{ij} der Tabelle.

- (b) Voraussetzung der Analyse ist, dass die Häufigkeiten in der Tabelle Volumen unter einer multivariaten Normalverteilung entsprechen. \square
- (c) Die PCA wird auf die Matrix $X = (x_{ij})$ mit

$$x_{ij} = \frac{(n_{ij} - n_{i+}n_{+j})}{\sqrt{n_{i+}n_{+j}}}$$

angewendet. \square **x**

- (d) Im Biplot werden sowohl die Zeilen- wie auch die Spaltenkategorien durch Punkte in einem gemeinsamen Koordinatensystem repräsentiert. Die Distanzen zwischen Zeilen- und Spaltenpunkten entsprechen den Beiträgen dieses Kategorienpaares zum Gesamt- χ^2 . \square

41. **Aufgabe:** Viele Häufigkeitstabellen sind mehr als 2-dimensional; so hat man die Selbstmorde, die während einer bestimmten Anzahl von Jahren registriert wurden, nach Maßgabe (i) des Geschlechts, (ii) des Alters der Personen und (iii) nach Art der Methode klassifiziert. Die Korrespondenzanalyse geht aber von 2-dimensionalen Häufigkeitstabellen aus.

- (a) In diesem Fall ist keine Korrespondenzanalyse durchführbar. \square
- (b) Es besteht stets die Möglichkeit, die 3-dimensionale Tabelle einfach als 2-dimensionale Tabelle anzuschreiben, z.B. die Zeilenkategorien mit den Methoden zu identifizieren, die Spaltenkategorien mit dem Geschlecht und die Altersgruppen jeweils als Stufen der Merkmale 'weiblich' und 'männlich' zweimal als Spaltenkategorien auftreten zu lassen. \square **x**
- (c) Die Korrespondenzanalyse ist nicht berechenbar, weil ein χ^2 nur für 2-dimensionale Tabellen berechnet werden kann. \square
- (d) Die Korrespondenzanalyse ist nicht sinnvoll, da ja die Altersgruppen nun formal wie verschiedene (Spalten-)Kategorien betrachtet werden; es wird deutlich, dass formale Methoden die Sinnhaftigkeit psychischer Phänomene nicht erfassen können. \square

42. **Aufgabe:** Viele der standardmäßig in der Psychologie verwendeten multivariaten Verfahren basieren auf Resultaten der *linearen Algebra*, d.h. es wird implizit angenommen, dass Kovarianzen bzw Korrelationen durch ein rein additives Zusammenwirken latenter Variablen erklärt werden können.

- (a) Die Annahme beruht auf dem Sachverhalt, dass die meisten nichtlinearen Zusammenhänge recht gut durch lineare Modelle approximiert werden können. \square **x**
- (b) Die Annahme reflektiert den Grundfehler jeden szientifischen Ansatzes, die Sinnhaftigkeit und damit die Nichtquantifizierbarkeit psychischen Geschehens grundsätzlich zu mißachten. \square

- (c) Der Philosoph Immanuel Kant hatte Recht, wenn er postulierte, dass die Psychologie niemals eine Wissenschaft sein könne, da sie nicht mathematisierbar sei. □
- (d) Der algebraische Ansatz ist schon deswegen verfehlt, weil er wegen der impliziten Annahme der Determiniertheit allen psychischen Geschehens die wahrhaft probabilistische Natur dieses Geschehens leugnet. □