Vektoren und Matrizen
Übungsaufgaben 20. 11. 2011
(+ Lösungen)

- **Aufgabe 1:** Es seien $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ n-dimensionale Vektoren und es gelte $\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ (dh a und b sind Skalare). Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{X}_2 + \beta\mathbf{x}_3$ gilt, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wie lassen sich die Koeffizienten α und β durch die Koeffizienten a und b ausdrücken (und umgekehrt)?.

  Hinweis: Sie müssen die Gleichung $\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ nur nach $\mathbf{x}_1$ auflösen!

  Lösung:
$$\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \frac{1}{a}\mathbf{x}_3 - \frac{b}{a}\mathbf{x}2,$$
  dh $\alpha = b/a$, $\beta = 1/a$, $a \neq 0$ vorausgesetzt.

- **Aufgabe 2:** Es gelte $\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ für bestimmte a und b. $\underset{\sim}{0}$ sei ein Vektor mit n Komponenten, die alle gleich Null sind. Es gelte außerdem $\underset{\sim}{0} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3$. Welchen Wert hat c?

  Lösung:
$$\underset{\sim}{0} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2) \Rightarrow c = -1.$$

- **Aufgabe 3:** Gegeben sei die Matrix
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10.5 \\ 2 & 6 & 13.0 \\ 3 & 7 & 15.5 \end{pmatrix}$$
  Es seien $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ die drei Spaltenvektoren von X.

  1. Die Elemente der Matrix X sind so gewählt worden, dass sie der Bedingung $\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ genügen. Welche Werte haben a und b?

     Hinweis: Die ersten beiden Komponenten der drei Vektoren definieren ein Gleichungssystem mit den Ubekannten a und b.

     Lösung:
$$\begin{aligned} 10.5 &= a \cdot 1 + b \cdot 5 \\ 13 &= a \cdot 2 + b \cdot 6 \\ 15.5 &= a \cdot 3 + b \cdot 7 \end{aligned}$$
     Es gibt mehr Gleichungen, als Unbekannte (a und b), aber nach der Voraussetzung $\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ existieren die a und b. Es genügt dann, zwei Gleichungen zu betrachten, etwa
$$\begin{aligned} 10.5 &= a \cdot 1 + b \cdot 5 \\ 13 &= a \cdot 2 + b \cdot 6 \end{aligned} \tag{1}$$
     Dann folgt $a = 10.5 - b5$, und in die zweite Gleichung eingesetzt hat man
$$13 = (10.5 - b5)2 + b6,$$
     woraus $b = 2$ folgt, und schließlich $a = .5$. Masn überzeugt sich leicht, dass a und b wirklich eine Lösung ist, wenn man die Werte in die dritte Gleichung einsetzt.

2. Bilden Sie die Matrizen $Y = X'X$ und $Z = XX'$.
Lösung:

$$X'X = \begin{pmatrix} 14 & 38 & 83 \\ 38 & 110 & 239 \\ 83 & 239 & 519.5 \end{pmatrix}, \quad XX' = \begin{pmatrix} 136.25 & 168.5 & 200.75 \\ 168.5 & 209 & 249.5 \\ 200.75 & 249.5 & 298.25 \end{pmatrix}$$

3. Es ist

$$P = \begin{pmatrix} .144 & .965 & -.022 \\ .414 & -.259 & -.873 \\ .899 & -.035 & .436 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -.460 & -.788 & .408 \\ -.570 & -.090 & -.816 \\ -.681 & .608 & .408 \end{pmatrix},$$

und

$$D = \begin{pmatrix} 642.616 & 0 & 0 \\ 0 & .784 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Versichern Sie sich, dass $Y \approx PDP'$ und $Z \approx QDQ'$ gilt (es wird $\approx$ statt $=$ geschrieben, weil die Gleichheit wegen numerischer Fehler nur approximativ gelten wird). Überprüfen Sie auch, ob die Eigenvektoren (= Spaltenvektoren) in guter Näherung (i) orthogonal und (ii) normiert sind.

Lösung: Reines Nachrechnen … Das eigentlich Interessante an der Aufgabe ist, dass die Diagonalmatrix der Eigenwerte nur zwei von Null verschiedene Elemente hat. Dieser Sachverhalt ist Ausdruck der Tatsache, dass jeweils ein (Spalten-)Vektor von X Linearkombination der beiden übrigen ist. Kein Spaltenvektor ist aber lediglich eine Verkürzung oder Verlängerung eines anderen, dh irgendzwei Vektoren von X haben stets eine verschiedene Orientierung. Man kann dann eine Ebene durch diese beiden Vektoren legen, und der dritte Vektor, der sich als Linearkombination der ersten beiden ergibt, muß dann in dieser Ebene liegen. Eine Ebene ist aber ein 2-dimensionaler Raum. Die Anzahl der Eigenwerte von $X'X$ oder XX', die von Null verschieden sind, ist gleich der Dimensionalität des (Teil-)Raumes, in dem die Vektoren von X liegen. Bestimmt man also die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $X'X$ oder XX', so erhält man Information über die Dimensionalität des Teilraumes, in dem die Vektoren von X liegen. Davon wird bei faktorenanalytischen Verfahren Gebrauch gemacht.