

Vektoren und Matrizen

Übungen 3: Dyadische Produkte

Diese Übungen beziehen sich auf Anwendungen des dyadischen Produkts zweier Vektoren. Dyadische Produkte sind oft hilfreich, um bestimmte Sachverhalte auszudrücken. Das dyadische Produkt wird im Skriptum 'Vektoren und Matrizen', Seite 10 definiert.

1. **Aufgabe:** Nach Satz 2.1 des Skriptums (S. 28) kann eine beliebige $(m \times n)$ -Matrix als Produkt $X = QA'$ zweier Matrizen mit jeweils einem Rang von $r \leq \min(m, n)$ dargestellt werden. Es sei $Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r]$, $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r]$ (In Satz 2.1 wird $X = UV$ geschrieben, d.h. es ist hier $Q = U$, $V = A'$. Der Grund für diese Umbenennung sind die in der Faktorenanalyse gebräuchlichen Schreibweisen.

Zeigen Sie, dass dann

$$X = \mathbf{q}_1 \mathbf{a}'_1 + \mathbf{q}_2 \mathbf{a}'_2 + \dots + \mathbf{q}_r \mathbf{a}'_r,$$

und insbesondere

$$x_{ij} = q_{i1} a_{j1} + \dots + q_{ir} a_{jr}$$

gilt, q_{ik} die i -te Komponente von \mathbf{q}_k , a_{jk} die j -te Komponente von \mathbf{a}_k .

2. **Aufgabe:** Es sei R eine symmetrische Matrix, z.B. eine Matrix von Korrelationen r_{jk} ; Wegen $r_{jk} = r_{kj}$ für alle $j, k = 1, \dots, n$ ist dann $R' = R$. Es kann gezeigt werden (in der kommenden Vorlesung), dass für eine symmetrische Matrix immer eine $(n \times n)$ -Matrix P und eine Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ existieren derart, dass

$$R = P \Lambda P',$$

wobei P orthonormal ist (aber diese Eigenschaft ist für die folgende Frage nicht relevant). Es sei $P = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]$, \mathbf{p}_k , $k = 1, \dots, n$ die Spaltenvektoren von P . Zeigen Sie, dass dann R in der Form

$$R = \lambda_1 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{p}_n \mathbf{p}'_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{p}_k \mathbf{p}'_k$$

dargestellt werden kann. Wie lautet insbesondere der Ausdruck für das Element r_{jk} von R ?

3. Es sei X eine $(m \times n)$ -Matrix von spaltenzentrierten Messwerten. Es sei

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$$

der i -te *Zeilenvektor* von X , – hier als Spaltenvektor angeschrieben. Offenbar ist $C = \frac{1}{m}X'X$ die Matrix der Kovarianzen zwischen den Variablen (die den Spalten von X entsprechen).

Zeigen Sie, dass C auch in der Form

$$C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i'$$

geschrieben werden kann.