.

# Wissenschaftstheorie IV

.

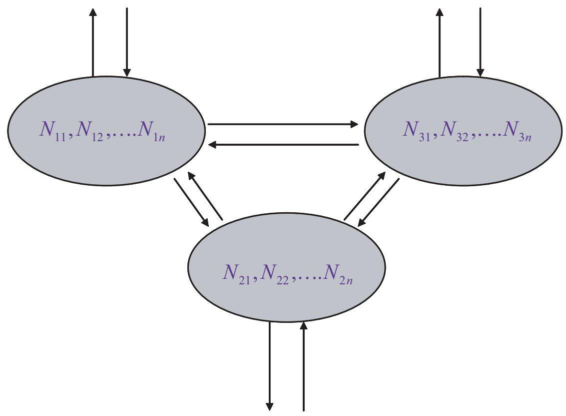
## Kausalität und Zufall[1]

U. Mortensen

[1]Letzte Änderung/Korrektur: 17. 01. 2024

# Inhaltsverzeichnis

Abbildung 1: Neuromodell für Emotionen I

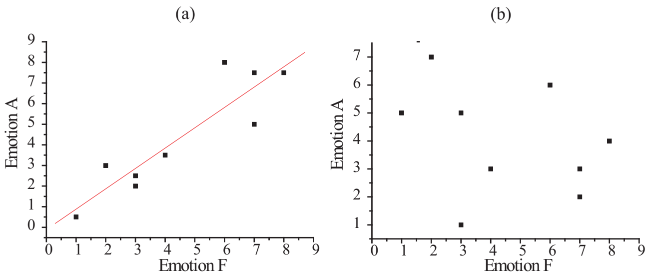



# 1 Dynamische Systeme

In diesem Abschnitt soll eine kurze Einführung in die Theorie der Dynamischen Systeme gegeben werden, ohne dass allzu sehr auf mathematische Details eingegangen wird. Das Ziel ist nur, einen Eindruck von dem zu vermitteln, was ein dynamisches System ist und welche Möglichkeiten der Erklärung psychischer Phänomene die Modellierung psychischer Prozesse anhand solcher Systeme es gibt, auch wenn eine direkte empirische Überprüfung spezieller Modelle gegenwärtig noch als schwierig erscheint. Grundsätzlich läßt sich die Aktivität des Hirns durch entsprechende dynamische Systeme modellieren (Churchland, 2002, p. 774)[2]. Auch aus diesem Grunde ist es sinnvoll, einen grundlegenden Begriff von dem, was ein dynamisches System ist, zu haben; dass dieser Ansatz auf die Problematik der algorithmischen Repräsentation derjenigen Prozesse, die Bewußtsein erzeugen, führen kann, muß nicht *a priori* als Nachteil dieses Ansatzes gelten.

[2]Churchland, P.S.: Brain-wise – Studies in Neurophilosophy. CCambridge, Mass 2002

Abbildung 2: Standarduntersuchung zur Beziehung zwischen Aggression und Frustration; (a) erste Untersuchung, (b) Replikation unter identischen Experimentalbedingungen. Nur die Zustände der untersuchten Personen sind verschieden.




## 1.1 Grundlegende Begriffe

**The Situation**
*Things will not be necessarily continuous.*
*The fact that they are something other than perfectly continuous*
*Ought not to be characterized as a pause.*
*There will be some things that people will see.*
*There will be some things that people won't see.*
*And life goes on.*

*Donald Rumsfeld*
*– Oct. 12, 2001, Department of Defense news briefing.*
*The poetry of D.H. Rumsfield. In: Slate, http://www.slate.com/id/2081042*

Der Anschaulichkeit wegen sollen die Intensitäten zweier Emotionen, der Frustration und der Aggression, betrachtet werden. Es gibt Anlass zu vermuten, dass diese beiden Emotionen miteinander interagieren; der klassischen Hypothese von Dollard et al. (1939) zufolge kann Frustration eine aggressive Stimmung erzeugen. Empirisch findet man, dass gelegentlich tatsächlich eine Aggression durch eine vorangegangene Frustration erzeugt wurde, aber der Zusammenhang zwischen den beiden Emotionen scheint nicht auf einer festen Kopplung zu beruhen, denn nicht immer lösen Frustrationen Aggressionen aus. In der Abbildung 2 wird verdeutlicht, was in Experimenten zur Frustrations-Aggressions-Hypothese geschehen kann, wenn diese im Rahmen eines zwar üblichen, aber gleichwohl konzeptuell inadäquaten experimentellen Designs durchgeführt werden. Dem hier Standardansatz genannten Vorgehen entsprechend würde man eine (oder mehrere) Versuchspersonen (Vpn) unterschiedlich stark frustrieren und dann das Ausmaß erzeugter Aggression messen. Auf die Details einer solchen Messung muß hier nicht eingegangen werden, obwohl deutlich ist, dass die den Messungen unterliegende Operationalisierung von "Frustration" und "Aggression" wesentlich für den Erfolg des Experimentes ist; der Einfachheit halber werde einmal angenommen, dass eine geeignete Operationalisierung gefunden wurde. Auf der $x$-Achse (Emotion F) wird nun die experimentell erzeugte Frustration abgetragen, und auf der $y$-Achse die beobachtete Aggression (Emotion A). Im Falle (a) war das Experiment "erfolgreich": bis auf die unvermeidlichen "Messfehler" steigt die Aggression mit der Frustration, die Regressionsgerade kann die Daten gut "erklären". Die Abbildung (b) zeigt die Daten aus einer Wiederholung des Experiments unter identischen Bedingungen. Damit sind natürlich die äußeren Bedingungen gemeint, wie Tageszeit, Raumtemperatur, Anordnung der Geräte, etc. Was sich nicht hinreichend normieren läßt ist der interne Zustand der Vpn. Der hat sich so geändert, dass sich kein Zusammenhang zwischen den beiden Emotionen mehr finden läßt. Ein "naiver", am frühen Popper orientierter Experimentalpsychologe könnte jetzt zu dem Schluß kommen, dass die Frustrations-Aggressions-Hypothese widerlegt sei, denn der Zusammenhang zwischen den beiden Emotionen läßt sich anscheinend nicht konsistent nachweisen.

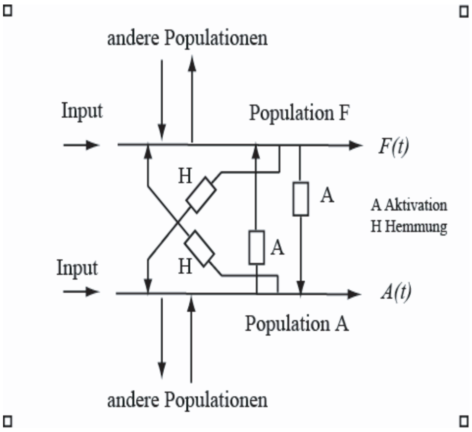
Aber ein solcher Schluß ist möglicherweise verfrüht. Um diese Vermutung zu erläutern, werden die Intensitäten, mit denen die beiden Emotionen auftreten, als Funktionen der Zeit aufgefasst. Dementsprechend sei nun $F(t)$ die Intensität der erlebten Frustration zur Zeit $t$, und $A(t)$ sei die Intensität der erlebten Aggression zur Zeit $t$. Gesucht ist ein Modell für die Dynamik der Interaktion zwischen $F$ und $A$. Wenn die Intensitäten gleich Null sind, also die beiden Emotionen nicht erlebt werden, kann man $F(t) = A(t) = 0$ annehmen, wobei $t$ ein Intervall durchläuft, das dann endet, wenn eine der beiden Funktionen einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Um die Dynamik zu beschreiben, benötigt man zunächst ein Maß für die Veränderung von $F$ bzw. von $A$. Formal läßt sich dieses Maß zunächst als Differenz einführen: $F(t + \Delta t) - F(t)$ gibt an, wie sehr sich die Intensität der Frustration im Zeitpunkt $t$ von der Intensität im Zeitpunkt $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$, unterscheided. Insbesondere kann man den Quotienten

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta F(t)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

betrachten, wobei $\Delta F(t) = F(t + \Delta t) - F(t)$ ist. Der Quotient gibt die Rate der Veränderung in einem Intervall der Länge $\Delta t$, abhängig vomWert $t$, an. Läßt man nun $\Delta t$ beliebig klein werden, so erhält man die Rate der Veränderung im Zeitpunkt $t$, d.h. man erhält den Differentialquotienten $dF/dt$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{dF(t)}{dt}. \tag{1.2}$$

Abbildung 3: Neuromodell für Emotionen II




**Beispiel:** Angenommen, die Frustration würde innerhalb eines bestimmten Zeitintervalles $J = [t_0, t_1]$ quadratisch wachsen, so dass $F(t) = at^2$ für $t \in J$, wobei $a > 0$ eine Proportionaliätskonstante ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} &= \frac{a(t+\Delta t)^2 - at^2}{\Delta t} = \frac{a(t^2 + \Delta t^2 + 2t\Delta t - t^2)}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta t^2 + 2t\Delta t}{\Delta t} \\ &= a(\Delta t + 2t) \end{aligned}$$

Für $\Delta t \to 0$ folgt offenbar

$$\frac{dF(t)}{dt} = 2at, \quad t \in J. \tag{1.3}$$

Wächst also die Intensität der Frustration quadratisch an, so ist die Rate der Veränderung im Zeitpunkt $t$ gerade gleich $2at$, d.h. die Rate der Veränderung ist eine lineare Funktion der Zeit. □

**Differentialgleichungen:** Es werde zur Abkürzung $F'(t)$ für $dF(t)/dt$ geschrieben, also $F'(t) = dF(t)/dt$. Geometrisch läßt sich Die Funktion $F'$ als Steigung der Tangente an $F$ für den Zeitpunkt $t$ interpretieren. $F'$ ist durch $F$ eindeutig festgelegt, – wäre dies nicht so, gäbe es zum Zeitpunkt $t$ mehr als eine Tangente an $F$. Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn $F'$ zum Zeitpunkt $t$ nicht existiert, wie es für die Funktion $F(t) = 1/|t|$ im Punkt $t = 0$ der Fall ist. Es werde nun angenommen, dass $F'$ für alle $t$ existiere. Da $F'$ durch $F$ eindeutig festgelegt ist, existiert eine Funktion $f$ derart, dass

$$F'(t) = f(F(t)). \tag{1.4}$$

Diesen Sachverhalt kann man ausnutzen: *definiert* man eine Funktion $f$, für die (1.4) gelten soll, so hat man damit implizit eine Funktion $F$ festgelegt; die Gleichung (1.4) heißt Differentialgleichung, weil eine Funktion $F$ und ihr Differentialquotient zueinander in Beziehung gesetzt werden. Der Art, wie die Funktion $f$ gewählt wird, entspricht die Wahl eines bestimmen *Modells* für den Prozess, der durch die Funktion $F$ repräsentiert wird. Die Annahme von Differentialgleichungen impliziert die Annahme, dass die Variablen sich kontinuierlich verändern; dass diese Annahme nicht notwendig gilt, hat Donald Rumsfeld, ehemaliger US-Verteidigungsminister, in einer bleibenden Formulierung festgehalten (vergl. das Zitat am Anfang dieses Abschnitts).

Die einfachste Weise, einen Prozess zu modellieren, ist die Annahme der Gleichung

$$\frac{dF(t)}{dt} = c \text{ eine Konstante.} \tag{1.5}$$

Sicher ist $F(t) = c\,t + c_0$ eine Lösung für diese Gleichung. denn wenn man die Ableitung von $F$ bildet, erhält man $dF(t)/dt = c$, also genau (1.5). In Bezug auf (1.4) bedeutet dies, dass $f$ die Bedingung $f(F(t)) = c$ erfüllen soll, was sicher kein besonders interessanter Ansatz ist. Eine Alternative ist, $f(F(t)) = aF(t)$ zu setzen; man erhält

$$\frac{dF(t)}{dt} = aF(t). \tag{1.6}$$

Hier ist $a$ eine Konstante, die u.a. als "freier Parameter" in die Beziehung eingeht, d.h. $a$ kann nach Maßgabe irgendwelcher Kriterien gewählt oder aus Daten geschätzt werden. Diese Gleichung ist offenbar eine Differentialgleichung. Die Veränderung von $F$ (genauer: die Rate der Veränderung von $F$) soll proportional zum jeweiligen Wert von $F$ sein. Die Lösung der Gleichung besteht in der Angabe einer Funktion, die der Gleichung (1.6) genügt. Sicherlich ist $F(t) = 0$ für alle $t$ eine Lösung; $F$ ist dann eine Konstante, die eben gleich Null ist für alle $t$. Dies ist der "triviale" Fall. Eine Person, für die diese Funktion charakteristisch ist, ist nie frustriert. Es sei nun $F(t) \neq$konstant. Man kann dann zeigen, dass es für (1.6) nur eine Lösung gibt:

$$F(t) = ce^{at} + k, \quad a, kc \in \mathbb{R}, a, c \neq 0. \tag{1.7}$$

$c$ und $k$ sind weitere Konstante, d.h. Parameter. Es ist $dF/dt = ace^{at} = aF(t)$, inn Übereinstimmung mit (1.6). Für $a > 0$ steigt $F$ demnach exponentiell an, und für $a < 0$ fällt die Funktion $F$ exponentiell ab, falls sie in $t = 0$ ungleich Null war.

Analoge Betrachtungen gelten auch für die Aggression $A(t)$, und das ursprüngliche Ziel war ja, die Wechselwirkung zwischen $F$ und $A$ zu modellieren. So kann es sein, dass die Frustration zunächst Aggression erzeugt, nach einer gewissen Zeit aber die Aggression einen dämpfenden Einfluß auf die Frustration hat. Wird dann die Frustration reduziert, so reduziert sich unter Umständen auch die Aggression. Ein einfacher "Ansatz" ist:

$$\frac{dF(t)}{dt} = a_{11}F(t) + a_{12}A(t). \tag{1.8}$$

Hierin sind $a_{11}$ und $a_{12}$ bestimmte Konstante, die die gerade gegebene Kopplung zwischen den beiden Emotionen abbilden. Die Annahme, dass es sich um Konstante handelt, wird später wieder relaxiert (es gibt keinen Grund, anzunehmen, dass die beiden Emotionen stets in der gleichen Weise gekoppelt sind; die stimmungsmäßigen Großwetterlagen ändern sich ja mit der Zeit, wie jeder aufgrund einfacher Selbstbeobachtung weiß), aber im Moment ist es einfacher, eine feste Kopplung anzunehmen. Damit $A$ einen dämpfenden Einfluß auf $F$ haben kann, werden bestimmte Werte für $a_{12}$ anzunehmen sein, z.B. negative Werte. Für $A$ wird man eine analoge Gleichung aufstellen können, so dass man zu einem System zweier Differentialgleichungen kommt:

$$\frac{dF(t)}{dt} = a_{11}F(t) + a_{12}A(t), \tag{1.9}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = a_{21}F(t) + a_{22}A(t). \tag{1.10}$$

Diese beiden Gleichungen legen die Verläufe der Funktionen $F$ und $A$ fest, wenn das System aus seiner Ruhelage ausgelenkt worden ist. Man kann nun untersuchen, welcher Art die Interaktion zwischen den beiden Emotionen sind. Ein Spezialfall ergibt sich, wenn $dF/dt = dA/dt = 0$ ist, was für $t = t_0$ der Fall sein möge:

$$0 = a_{11}F(t_0) + a_{12}A(t_0), \tag{1.11}$$

$$0 = a_{21}F(t_0) + a_{22}A(t_0). \tag{1.12}$$

Setzt man zur Abkürzung $F_0 = F(t_0)$ und $A_0 = A(t_0)$, so lassen sich die Gleichungen als Vektorgleichung anschreiben:

$$\vec{0} = F_0 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = F_0\vec{a}_1 + A_0\vec{b}a_2 \tag{1.13}$$

mit

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}_1$ unf $\vec{a}_2$ impliziert, dass $F_0 = A_0 = 0$ die einzige Lösung für die Gleichung (1.13) ist gibt, wenn die Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ linear unabhängig sind, und zwei 2-dimensionale Vektoren sind linear unabhängig, wenn sie nicht parallel sind, d.h. wenn

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} \neq \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad \text{bzw.} \quad a_{21}a_{12} \neq a_{11}a_{22} \tag{1.14}$$

gilt. Dieser Fall ist ungleich wahrscheinlicher als der Spezialfall

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0,$$

d.h. im Allgemeinen wird es nur einen Fixpunkt, eben $F_0 = 0$, $A_0 = 0$ geben.

Soll das System aus dem Gleichgewicht gebracht werden, bedarf es einer Störung. Im einfachsten Fall besteht diese Störung aus einem "Stoss", der etwa auf (1.9) einwirkt. Man hat dann die Gleichungen

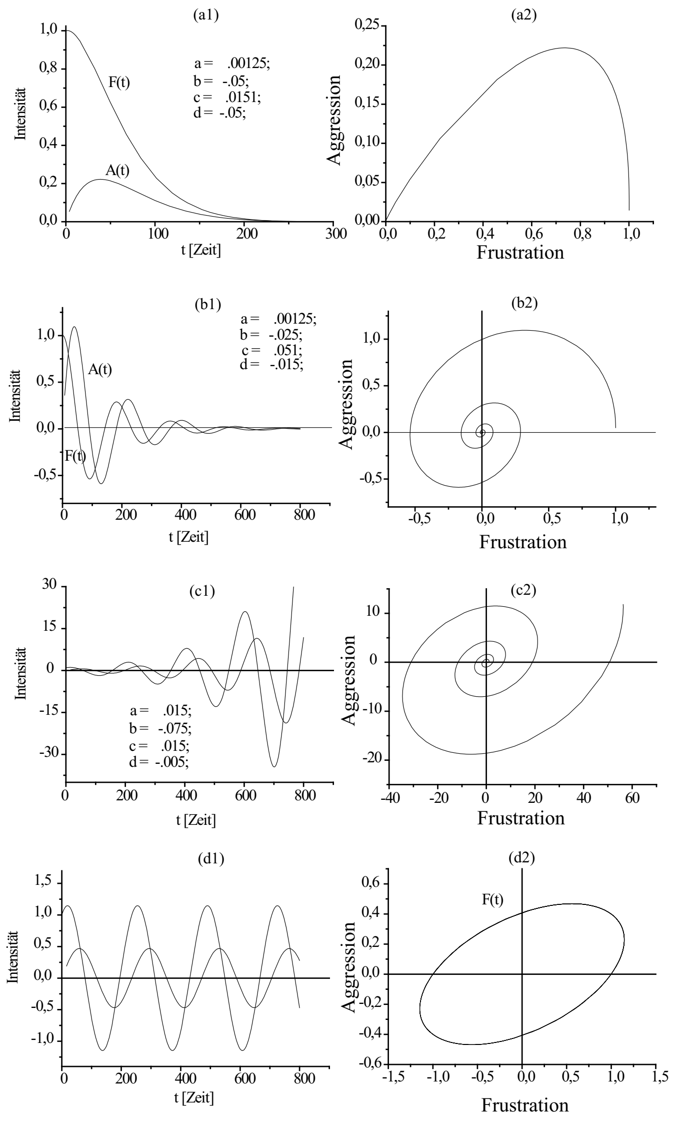
$$\frac{dF(t)}{dt} = a_{11}F(t) + a_{12}A(t) + s(t), \tag{1.15}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = a_{21}F(t) + a_{22}A(t). \tag{1.16}$$

wobei $s(t)$ für einen kurzen Stoss steht. Natürlich sind beliebige Zeitverläufe für $s$ denkbar, aber der Spezialfall eines Impulses von sehr kurzer Dauer ist von besonderem Interesse: kennt man die *Impusantwort*, d.h. die Reaktion des Systems auf einen Impuls, so läßt sich daraus die Reaktion auf eine Störung von beliebiger Dauer und Form berechnen. Dies bedeutet, dass die Impulsantworten das System charakterisieren, und es zeigt sich nun, dass es insgesamt vier Klassen von Impulsantworten gibt.

Durch geeignete Variationen der Werte der Parameter $a_{ij}$ lassen sich innerhalb jeder Klasse beliebig viele verschiedene Verläufe finden, so dass die Plots $A(t)$ versus $F(t)$ (vergl. Abb. 4) einigermaßen verschieden aussehen können. Zunächst zu den verschiedenen Klassen: (a1) und (a2) repräsentieren den Fall, dass die Auslenkungen sehr gedämpft verlaufen. Der Plot $A(t)$ versus $F(t)$ zeigt, zu welchem $F$-Wert ein gegebener $A$-Wert gehört. Es ist deutlich, dass dieser Plot nicht durch eine einzelne Regressionsgerade angenähert werden kann. Je nach Wahl der Parameter – der Konstanten $a_{ij}$ – kann dieser Plot schmaler oder noch breiter ausfallen. Für (b1) und (b2) spiralt die Kurve auf den 0-Punkt des Koordinatensystems zu, d.h. $F$ und $A$ konvergieren oszillierend gegen den 0-Punkt, der die stationäre Lösung abbildet. Hier sind verschiedene Spiralen möglich: sie können größere Auslenkung in der einen als in der anderen Richtung zeigen und dabei verschiedene Orientierungen annehmen. In (c1) und (c2) spiralt das System nach außen, d.h. das System ist, im Gegensatz zu den beiden vorangegagenen, instabil. Ein kleiner Stoß genügt, und sowohl die Frustration wie auch die Aggression schaukelt sich auf. In (d1) und (d2) gerät das System nach einer Anregung (Stoss) in eine oszillatorische Bewegung, die nicht mehr

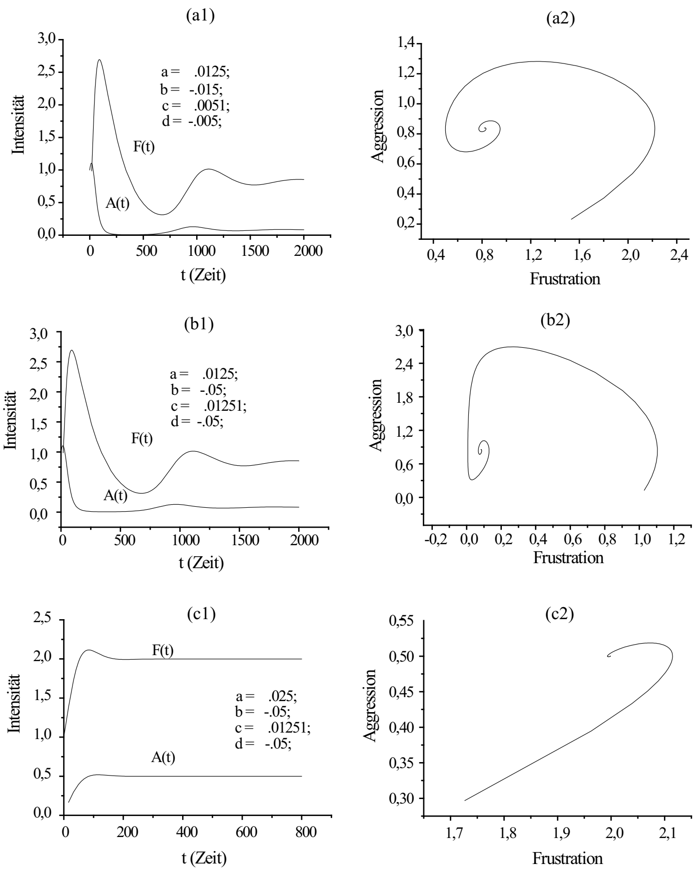
Abbildung 4: Typen von Reaktionen; (d1) und (d2): $a_{11} = .015$, $a_{12} = -.075$, $a_2 10 = .0125$, $a_{22} = -.015$. Die Typen sind durch bestimmte Beziehungen zwischen den Parametern bestimmt. Innerhalb jeden Typs existieren beliebig viele Varianten des Typs.




zum Nullpunkt zurückkehrt. Eine Person, die durch die Parameterwerte, die diese Bewegung implizieren, gekennzeichnet ist, würde also zwischen bestimmten Frustrations- und Aggressionswerten pendeln, ohne dass das System zur Ruhe kommt.

Das System (1.15) und (1.16) ist linear, d.h. die rechten Seiten sind

Abbildung 5: Typen von Reaktionen; nichtlineare Interaktion. Lineare Regressionen von Aggression (A) auf Frustration (F) als erste Approximation sind allenfalls für kleine Bereiche von A und F möglich, etwa in (c2) für $1.7 < F < 2$, oder $.4 < F < .8$ in (b2); in (a2) sind zwei verschiedene lineare Approximationen zwischen $1.2 < F < 2$ möglich. Das Vorzeichen des jeweiligen Steigungsparameters hängt von den jeweiligen Werten der Kopplungsparameter ab.




durch "gewogene" Summen von $F$ und $A$ definiert.

Biologische Systeme sind i.a. nichtlinear, dh. auf den rechten Seiten treten z.B. Produkte $F(t)A(t)$ auf, d.h. ein Differentialquotient – das Maß für die Veränderung von $F$ und $A$ – ist nicht nur proportional zu $A$ und $F$, sondern wie in

$$\frac{dF(t)}{dt} = a_{11}F(t) + a_{12}F(t)A(t) + s(t), \tag{1.17}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = a_{21}F(t) + a_{22}A(t). \tag{1.18}$$

zu $FA$. Man kann dies so interpretieren, dass $A$ auf $dF/dt$ wirkt in einem Ausmaß, das proportional zum momentanen Wert von $F$ ist. Auch Terme $F^2$ und/oder $A^2$ können auftreten, etwa wenn es autokatalytische Reaktionen gibt. Nichtlineare Gleichungen können ein Verhalten des Systems implizieren, das sich grundsätzlich von dem linearer Systeme unterscheidet. Andererseits lassen sich oft nichtlineare Systeme für kleine Auslenkungen (Stösse) durch lineare Systeme approximieren. Solche Approximationen werden u.a. dann diskutiert, wenn das Verhalten des Systems in der Nachbarschaft seiner Gleichgewichtslagen diskutiert werden soll, wenn etwa die Frage gestellt wird, ob das System dort stabil oder instabil ist.

## 1.2 Verallgemeinerungen

Wie in Abb. 1 angedeutet, werden verschiedene, miteinander interagierende Neuronenpulationen angenommen. In Gleichungssystemen der Art (1.15) und (1.16) bzw. (1.17) und (1.18) tauchen aber nur explizit zwei Populationen auf, eine für das Merkmal $F$, eine andere für das Merkmal $A$ (vergl. auch Abb. 3). Weiter sind die Emotionen bzw. Merkmale $F$ und $A$ durch Konstante $a_{ij}$ verkoppelt. Die Konstanten implizieren eine bestimmte Reaktionsweise des Systems, wie sie in den Abbildungen 4 und 5 illustriert werden. Tatsächlich muß aber die Annahme, dass die $a_{ij}$ Konstante sind, als Approximation gewertet werden. Denn sie repräsentieren ja einen Gesamtzustand einer Person, und der ändert sich im Laufe der Zeit. Es kann aber angenommen werden, dass diese Veränderung langsam ist im Vergleich zu den Änderungen, die für $F$ und $A$ auftreten können. Man wird also allgemein $a_{ij} = a_{ij}(t)$ setzen und kann den Spezialfall $a_{ij}(t) \approx a_{ij} =$ konstant betrachten. Der Fall $a_{ij} = a_{ij}(t)$ kann dann bedeuten, dass sich das qualitative Verhalten des $(F, A)$-System von einer Messung zur anderen ändert.

Die Form der Nichtlinearität, wie sie in (1.17) eingeführt wurde, ist ebenfalls ein Spezialfall. Um den allgemeinen Fall zu betrachten, kann man das System in der Form

$$\frac{dF(t)}{dt} = f_1(F(t), A(t)) + s_1(t), \tag{1.19}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = f_2(F(t), A(t)) + s_2(t). \tag{1.20}$$

anschreiben, wobei $f_1$ und $f_2$ irgendwelche Funktionen sind, und $s_1$ und $s_2$ sind Funktionen, die externe Einflüsse auf das $(F, A)$-System repräsentieren. Man kann die Darstellung aber noch weiter verallgemeinern, um das Wesentliche des Ansatzes weiter herauszustellen. Denn die Emotionen $F$ und $A$ sind nicht die einzigen Merkmale, die den psychischen Zustand eines Menschen ausmachen. Insgesamt seien es $n$ Merkmale (also nicht nur Emotionen) $E_1, \ldots, E_n$, die zu einem gegebenen Zeitpunkt $t$ den Zustand definieren. Eines von ihnen, etwa $E_i$, sei gerade durch $F$ gegeben, ein anderes, $E_j$, durch $A$, und die Dynamik ist dann durch die Gleichungen

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = f_1(E_1(t), \ldots, E_n(t)) + s_1(t) \tag{1.21}$$
$$\frac{dE_2(t)}{dt} = f_2(E_1(t), \ldots, E_n(t)) + s_2(t) \tag{1.22}$$
$$\vdots \tag{1.23}$$
$$\frac{dE_n(t)}{dt} = f_n(E_1(t), \ldots, E_n(t)) + s_n(t) \tag{1.24}$$

definiert. Die $f_1, \ldots, f_n$ sind i.a. nichtlineare Funktionen, durch die die Dynamik festgelegt wird. $\vec{E} = (E_1(t), \ldots, E_n(t))'$ ist der *Zustandsvektor* zum Zeitpunkt $t$; der Zustand ist durch die Werte der $E_i$ zum Zeitpunkt $t$ definiert.

**Fixpunkte:** Die Bedingung

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \frac{dE_2(t)}{dt} = \cdots = \frac{dE_n(t)}{dt} = 0 \tag{1.25}$$

definiert eine Gleichgewichtslage, auch Fixpunkt genannt. Ein Fixpunkt kann stabil sein; auf kleine Auslenkungen, d.h. Abweichungen von der Bedingung (1.25), reagiert das System mit dem ”Versuch”, zu (1.25) zurückzugelangen. Die intentionale Sprache (das System reagiert mit dem Versuch) sollte hier aber nicht täuschen, denn zunächst ist das Verhalten des Systems nicht durch mentale Absichten bestimmt, sondern durch die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$. Im Gegenteil, am Ende sollen mentale Absichten durch die Aktivität von Systemen erklärt werden! Der Aktivitätsbereich, innerhalb dessen das System zu einem Fixpunkt zurückkehren möchte, heißt der *Attraktionsbereich* des Fixpunkts. Weiter gibt es möglicherweise instabile Fixpunkte. Bei ihnen führt schon die kleinste Auslenkung, d.h. Abweichung von der Bedingung (1.25), dazu, dass sich die Aktivität des Systems entfaltet, – wobei es in den in den Attraktionsbereich eines anderen Fixpunktes gelangen kann. Dieser Fall wird in der Abbildung 5 dargestellt:das System wird aus der Gleichgewichtslage, also dem Fixpunkt (0, 0) ausgelenkt und stabilisiert sich wieder bei einem anderen Fixpunkt $\neq (0, 0)$, in diesem Fall also in einem Fixpunkt, in dem es bis zur nächsten Störung verbleibt, also mit einer konstanten Intensität von Frustration und Aggression. Eine dritte Möglichkeit sind *Grenzzyklen*; ist das System in den Attraktionsbereich in den eines Grenzzyklus geraten, durchläuft es periodisch bestimmte Zustände, von denen (1.25) nur ein möglicher Zustand ist.

Es sind insbesondere die instabilen Fixpunkte, die für eine allgemeine Vorhersage des Verhaltens eines Systems eine kritische Rolle spielen. Auf sie wird bei der Diskussion des Determinismus, als der Lehre, dass alles

Geschehen in der Welt durch Ursache und Wirkungsgefüge bestimmt ist, zurückgekommen.

Macht man Gebrauch von der Ausgangsanahme, dass die $E_i$ die Aktivität bestimmter Neuronenpopulationen abbilden, so kann man annehmen, dass die Anzahl $n$ ziemlich groß ist. Letzlich kann man jedes $E_i$ mit einem einzelnen Neuron identifizieren, so dass $n$ wirklich sehr groß ist. Bevor auf die Konsequenzen einer solchen Annahme eingegangen wird, muß aber noch angeführt werden, dass es sich bei dem System (1.21, ..., 1.24) immer noch um einen Spezialfall handelt, denn das System ist *deterministisch*. Liegen die Konstanten einmal fest, verhält sich das System in einer prinzipiell vorhersagbaren Weise (wenn man von chaotischen Dynamiken einmal absieht). Nun kann man aber die Aktivität eines Neurons kaum durch eine deterministische Gleichung beschreiben, denn die beteiligten chemischen Prozesse haben den Charakter von Diffusionsprozessen und sind deshalb intrinsisch stochastisch. Dieser Sachverhalt impliziert, dass auch die Aktivität eines Neurons, also die Erzeugung von Aktionspotentialen, ein stochastisches Element enthält. Man muß also die Gleichungen als stochastische Gleichungen anschreiben. Die Details stochastischer Differentialgleichungen können in diesem Text nicht geschildert werden, so dass auf eine explizite Darstellung eines stochastischen Systems hier verzichtet werden soll. Es muß aber darauf hingewiesen werden, dass die stochastischen Aspekte eine weitere Veränderung des qualitativen Verhaltens implizieren. Von der Darstellung der Hirnaktivität anhand eines solchen allgemeinen Systems ist man noch weit entfernt, aber es ergeben sich gleichwohl grundsätzliche Fragen, die im Folgenden diskutiert werden sollen.

Die wesentlichen Punkte sollen kurz zusammengefasst werden:

1. Wird der Verlauf psychischer Zustände durch Differentialgleichungen beschrieben, so erhält man eine Repräsentation der Dynamik der Zustände.

   Bei der Beschreibung der Dynamik psychischer Zustände durch Differentialgleichungen wird implizit eine Reihe von Annahmen gemacht: so wird etwa angenommen, dass die Intensität einer Emotion als stetige und differenzierbare Funktion der Zeit darstellbar ist. Dies bedeutet, dass man annimmt, dass sich (i) die Intensität nicht sprunghaft im strengen Sinn des Wortes verändert und dass (ii) die Veränderung der Intensität nie Ecken und Kanten aufweist. Ist etwa $x(t)$ die Intensität der Frustration zur Zeit $t$, so ist ein Sprung im strengen Sinn des Wortes durch

   $$x(t) = \begin{cases} a, & t_0 \leq t \leq t_1 \\ b, & t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

   wobei natürlich $a \neq b$ angenommen wurde, und wo $(t_1, t_2)$ ein offenes Intervall ist, d.h. $t_1$ gehört nicht zu diesem Intervall. Diese Funktion liefert auch ein Beispiel für eine Funktion mit Knicks und Kanten: in $t_1$ springt sie von $a$ nach $b$ und in $t_1$ ist kein Differentialquotient definiert. Funktionen können auch stetig sein und trotzdem in bestimmten Punkten nicht differenzierbar sein, z.B. die Funktion $x(t) = 1/|t|$; in $t = 0$ ist sie – wie für die übrigen $t$, zwar stetig, hat dort aber einen Knick, so dass sich nicht eindeutig nur eine Tangente an $x(t)$ existiert, sondern unendlich viele. Die Forderung nach Sprung- bzw. Knicklosigkeit mag harmlos erscheinen, – schließlich erlebt man derartige Veränderungen psychischer Zustände ja nicht. Plötzliche Stimmungumschwünge können auch ohne Knicks und Kanten modelliert werden, es genügen ja kleinste Abrundungen (Mollifikationen), die die Differenzierbarkeit wieder herstellen. Gleichwohl muß man sehen, dass die Modellierung durch Systeme von Differentialgleichungen, d.h. durch dynamische Systeme, eine gewisse Idealisierung bzw. Einschränkung darstellt.

2. Es wird gelegentlich gesagt, Aggression sei eine Folge von Frustration, soll heißen: Frustration ist eine (nicht notwendig die alleinige) Ursache von Aggression. Im Rahmen eines dynamischen Modells läßt sich eine solche Redeweise nicht aufrechterhalten, denn hier wechselwirken Aggression und Frustration. Denn die "Störung" wird sich einerseits i.a. auf beide Emotionen auswirken, und selbst dann, wenn die Störung nur auf die Frustration einwirkt, d.h. eine Frustration erzeugt, so wirkt sie über die Kopplung mit anderen Emotionen auf das gesamte System. Der Störung kann man allerdings eine kausale Rolle zuschreiben, denn ohne die Störung würde das System in der Gleichgewichtslage bleiben.

3. Die "Konstanten" des Systems sind i.a. nicht konstant, sondern unterliegen ebenfalls einer Dynamik, die von der Umgebung des Systems moduliert werden kann. Dieser Sachverhalt impliziert, dass die Reaktion auf die gleiche "Störung" (= Stimulierung) nicht notwendig die gleiche Reaktion hervorruft.

4. Die Dynamik der "Konstanten" erklärt, warum emotionale Reaktionen zu verschiedenen Zeiten verschieden sein können, auch wenn der "Input" identisch ist.

5. Die Hoffnung, dass man die Dynamik durch einen phänomenologischen Ansatz identifizieren kann, ist kaum zu rechtfertigen. Dabei ist mit phänomenologischem Ansatz der Versuch gemeint, die Intensität erlebter Emotionen und anderer psychischer Zustände eben phänomenologisch zu erfassen, also etwa als Ratings, mit denen eine Person die erlebte Intensität angibt. Dieser Sachverhalt dürfte einer der Gründe sein, weshalb die Modellierung psychischer Prozesse anhand von Differentialgleichungen bisher kaum vorgenommen wurden.

6. Explizite "Lösungen" für die Funktionen $F$ und $A$ bzw. allgemein für die Funktionen $E_1, \ldots, E_n$ wird man nur in sehr einfachen Fällen finden, etwa dann, wenn der Spezialfall eines linearen Systems postuliert wird, und auch dann nur für den Spezialfall sehr einfacher "Störungen" $s_i$. Die Lösungen können aber numerisch bestimmt werden, also durch ein geeignetes Computerprogramm.

Der Begriff des dynamischen Systems ist bis hierher relativ anschaulich eingeführt worden. Die allgemeine Spezifikation des Begriffs des dynamischen Systems ist etwas abstrakter, macht dafür aber die für den Begriff des Determinismus wesentlichen Aspekte solcher Systeme explizit.

**Allgemeine Charakterisierung eines Dynamischen Systems:** Der Zustand des betrachteten Systems im Zeitpunkt $t$ soll durch $x(t)$ repräsentiert werden, wobei $x(t)$ als Vektor $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))'$ aufgefaßt wird. Die $n$ Komponenten $x_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, von $x(t)$ repräsentieren dann bestimmte Zustandsaspekte und können als Koordinaten eines Punktes $x$ bzw. $x(t)$ im $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden. Dementsprechend werden die Ausdrücke "Punkt" und "Zustand" synoym verwendet werden. Die $x_i(t)$ sind Funktionen der Zeit. Der Verlauf dieser Zustandsänderungen definiert die Dynamik des Systems. Die Definition des Begriffs des dynamischen Systems wird dementsprechend auf einen "Zustandsraum" als Teilraum des $\mathbb{R}^n$ Bezug nehmen und eine allgemeine Charakterisierung der Dynamik enthalten.

Ist ein Zustand durch einen Punkt $x(t)$ repräsentiert, so bedeutet die Veränderung des Zustands nach $s$ Zeiteinheiten den Übergang zu einem anderen Punkt $x(t+s) = (x_1(t+s), \cdots, x_n(t+s))'$. Formal wird also die Dynamik durch eine Abbildung von Punkten im $\mathbb{R}^n$ auf Punkte im $\mathbb{R}^n$ erklärt. Dementsprechend hat man dann die

**Definition 1.1** *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet*[3] *des $\mathbb{R}^n$ und $\phi\colon \mathbb{R}\times M \to M$ sei eine stetige Abbildung, die für alle $x \in M$ den Bedingungen*

*(i)* $\phi(0, x) = x$

*(ii)* $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(t + s, x)$ *für alle* $s$, $t \in \mathbb{R}$

*genügt. Dann heißt $\phi$* dynamisches System*, und $M$ heißt* Phasen- *oder* Zustandsraum*. $x \in M$ heißt* Zustand *oder* Phasenpunkt*. Das Paar $(M, \phi)$ heißt* Zustands- *oder* Phasenfluß*.*

Gemäß Definition 1.1 ist ein dynamisches System abstrakt als eine Abbildung $\phi$ definiert, und zwar werden Elemente von $\mathbb{R} \times M$ auf Punkte in $M$ abgebildet. Sind $M$ und $\phi$ gegeben, so hat man das System spezifiziert. Ein

[3] Das Gebiet $M \subset \mathbb{R}$ ist offen, wenn die Randpunkte des Gebietes nicht zu $M$ gehören.

Element aus $\mathbb{R} \times M$ ist ein Paar $(t, x)$, durch das ein Zeitpunkt und ein Zustand festgelegt werden. Die Abbildung $\phi$ ordnet diesem Paar, d.h. dem Zustand $x$ zum Zeitpunkt $t$, einen bestimmten anderen Zustand $y \in M$ zu, nämlich $y = \phi(t, x)$. Durch $\phi$ werden die Zustandstransformationen oder der Fluß der Zustände festgelegt; daher der Ausdruck Zustandsfluß für das Paar $(M, \phi)$. (Der synonym gebrauchte Ausdruck *Phase* für Zustand geht auf Betrachtungen in der Physik zurück.) Die Bedingungen (i) und (ii) in Definition 1.1 heißen dementsprechend auch *Flußaxiome*.

Für die in Definition 1.1 eingeführte Abbildung $\phi$ ist Stetigkeit gefordert worden; dies bedeutet, dass kein sprunghafter Übergang von einem Zustand zu einem anderen erfolgen soll; jeder Übergang benötigt Zeit. Die Implikationen dieser Forderung werden anhand des in der folgenden Definition eingeführten Begriffs, der es erlaubt, weitere Eigenschaften eines dynamischen Systems herzuleiten, deutlich werden.

**Definition 1.2** *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ der Zustandsraum eines dynamischen Systems und es sei $\varphi_x : \mathbb{R} \to M$, $\varphi_x(t) \mapsto y \in M$, eine Abbildung, die für spezielles $x \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ den Zustand $y \in M$ festlegt, den das System von $x$ ausgehend nach $t$ Zeiteinheiten annimmt. Dann heißt $\varphi_x$* Flußlinie *oder* Bewegung des Punktes $x$ unter Wirkung des Flusses $(M, \phi)$. *Die Menge $\varphi_x(\mathbb{R})$ der Punkte, die man von $x$ ausgehend erreicht, heißt die durch $x$ gehende* Trajektorie *(*Bahn, Orbit, Phasenkurve*) des dynamischen Systems $\phi$.*

Eine Trajektorie des dynamischen Systems $\phi$ ist dementsprechend das *Bild* der Abbildung $\varphi_x$. Natürlich ist $\varphi_x(t) = \phi(t, x)$. Während aber $\phi$ für *beliebiges* $x$ und $t$ den Zustand $y$ definiert, in den $x$ nach $t$ Zeiteinheiten übergeht, betrachtet $\varphi_x$ diesen Übergang nur für ein *spezielles* $x \in M$, d.h. betrachtet man $\varphi_x$, so betrachtet man einen speziellen, durch den Punkt $x$ verlaufenden Prozeß. Dementsprechend ist die Kenntnis *aller* Abbildungen, d.h. aller Flußlinien $\varphi_x$ gleichbedeutend mit der Kenntnis von $\phi$. Man erhält nun sofort die im folgenden Satz enthaltenen Folgerungen:

**Satz 1.1** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *$\varphi_x(0) = x$ für alle $x \in M$, d.h. der Zustand verändert sich nicht, ohne dass Zeit vergeht.*
2. *Es sei $y = \varphi_x(t_0) \in M$; dann läßt sich auch eine Flußlinie für $y$ erklären. Offenbar ist $\varphi_y(t) = \varphi_x(t_0 + t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*
3. *Haben zwei Flußlinien $\varphi_x$ und $\varphi_y$ einen gemeinsamen Punkt, so sind sie überhaupt identisch; zwei* nicht identische *Flußlinien können sich nicht kreuzen.*

Die Folgerungen 1. und 2. sind unmittelbar klar. Die Folgerung 3. sieht man wie folgt ein: es gelte etwa $\varphi_y(t) = \varphi_x(t_0 + t)$. Dies heißt aber $y = \varphi_x(t_0)$, und nach Satz 1.1 erreicht man alle Zustände $z = \varphi_y(t)$ ebenfalls, wenn man von $x$ ausgehend die Zustände $\varphi_x(t_0 + t)$ bestimmt. Dies heißt, dass die Menge $\varphi_y(\mathbb{R})$ der Punkte, die man von $y$ ausgehend erreicht, gleich der Menge $\varphi_x(\mathbb{R})$ der Punkte ist, die man von $x$ ausgehend erreicht; die durch $x$ und $y$ gehenden Trajektorien sind also gleich. Da sich aus $\varphi_y(t) = \varphi_x(t_0 + t)$ die Gleichheit der Trajektorien ergibt, folgt aus der *Ungleichheit* der Trajektorien $\varphi_x(\mathbb{R})$ und $\varphi_y(\mathbb{R})$ auch, dass es keine Punkte $x$ und $y$ geben kann, für die $\varphi_y(t) = \varphi_x(t_0 + t)$ gilt. Durch jeden Punkt $x \in M$ kann also *nur eine* Trajektorie gehen.

Offenbar wird ein dynamisches System in Definition 1.1 ohne expliziten Bezug auf Differentialgleichungen eingeführt. Dass die Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen gerade die Trajektorien von dynamischen Systemen definieren, muß nun gezeigt werden[4]; dieser Nachweis soll hier aber nicht geführt werden (vergl. Arrowsmith and Place (1990)). Der für die folgenden Betrachtungen wichtige Aspekt sind die Eigenschaften der Bewegung des Punktes $x(t)$ durch den Phasen- oder Zustandsraum: wird der Startpunkt der Bewegung festgelegt, so liegt die gesamte Bewegung *eindeutig* fest, und für zwei verschiedene Startpunkte sind auch die korrespondierenden Bewegungen entweder vollständig voneinander verschieden oder sie sind identisch. Die vollständige Verschiedenheit äußert sich in der Tatsache, dass sich zwei Bahnkurven, also Bewegungen, nicht kreuzen können, – sie hätten dann ja einen Punkt gemeinsam. Die Verschiedenheit zweier Trajektorien bedeutet nicht, dass sie sich nicht sehr ähnlich sein können; man betrachte dazu noch einmal die Abbildung 4. Die Kurven a2 bis d2 repräsentieren jeweils Klassen von Trajektorien. Die zu einer Klasse gehörenden Trajektorien können einander beliebig ähnlich sein, – so lange aber zum Beispiel die Trajektorien der Klassen b2 und c2 auch nur in einem Punkt außer dem Fixpunkt verschieden sind, so sind sie in allen Punkten außer dem Fixpunkt verschieden.

## 1.3 Feldgleichungen und neuronale Systeme

Die Aktivität $u$ eines neuronalen Systems kann u. U. durch Funktionen des Orts $(x, y)$, der Zeit und anderer Parameter der Neuronen dargestellt werden. Sind die Neuronen im wesentlichen identisch und unterscheiden sie sich nur in Bezug auf die Ortskoordinaten $(x, y)$, so ist die Aktivität in $(x, y)$ zur Zeit $t$ durch $u(x, y, t)$ gegeben. Die Veränderung der Aktivität hinsichtlich der Koordinate $x$ bzw. $y$ ist dann durch die *partiellen Ableitungen* $\partial u/\partial x$ und $\partial u/\partial y$ gegeben, wobei $\partial$ eben für die partielle Ableitung steht.

[4]Lipshitz-Stetigkeit und linear-beschränkte Funktionen, Knoblauch-Kappel (1974), p. 59

Die Veränderung von $u$ in $(x, y)$ mit der Zeit $t$ ist dann natürlich durch $\partial u/\partial t$ gegeben. Natürlich kann man neuronale Systeme mit nicht identischen Neuronen ebenso betrachten, etwa Systeme von Neuronen, deren rezeptive Felder durch Gaborfunktionen definiert sind. Eine Gaborfunktion ist eine Funktion der Form

$$u(x) = \begin{cases} A\sin(2\pi f x)\exp(-(x-x_0)^2/\sigma^2), & \text{oder} \\ A\cos(2\pi f x)\exp(-(x-x_0)^2/\sigma^2), & \end{cases}$$

d.h. es handelt sich um sinusförmige Verläufe mit einer Gaußschen Envelope. $A$ ist die Amplitude, in $x_0$ ist $u$ maximal, $f$ ist die Ortsfrequenz und $\sigma^2$ definiert, wie bei der Gaußfunktion, die örtliche Ausdehnung. Die Funktion läßt sich auch 2-dimensional und mit beliebiger Orientierung $\alpha$ definieren; die zeitliche Charakterisierung läßt sich hinzufügen, indem man eine geeignet gewählte Funktion der Zeit etwa als Faktor einführt. Insgesamt wird dann $u$ als Funktion $u(a_1, \ldots, a_r, t)$ definiert, wobei $a_1, \ldots, a_r$ Orts- und andere Parameter der Funktion, die das rezeptive Feld definieren, sind. Wieder können die partiellen Ableitungen $\partial u/\partial a_j$ und $\partial u/\partial t$ betrachtet werden. Indem die partiellen Ableitungen zueinander in Beziehung gesetzt werden, entstehen Systeme von partiellen Differentialgleichungen, die implizit den Verlauf von $u$ charakterisieren. Wieder wird ein dynamisches System definiert. Über derartige Systeme läßt sich die Aktivität eines neuronalen Systems als Funktion des Orts, der Zeit und der übrigen Parameter erklären. Systeme dieser Art werden betrachtet, um z.B. EEG-Daten zu interpretieren, oder sogar visuelle Halluzinationen (BenYishai et al., (1995), Ermentrout and Cowan (1979), Coombes (2005)).

## 1.4 Stochastische Systeme

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist von der Form

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x(t)), \tag{1.26}$$

wobei $a$ eine Funktion von $x$ ist, etwa $a(x) = \alpha x(1-x)$ und $\alpha$ eine reelle Zahl. Diese Schreibweise ist sehr allgemein; insbesondere kann $x$ ein zeitabhängiger Vektor $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))'$ sein. Differentialgleichungen der allgemeinen Form (1.26) sind deterministisch: wird der Anfangswert $x(0)$ vorgegeben, liegt der Verlauf von $x$ für alle $t$ fest.

Der schottische Botaniker Robert Brown beobachtete unter dem Mikroskop die unregelmäßige Bewegung von Blütenstabkörnern, die Von Einstein (1905) thermodynamisch als Resultat der Stösse von Molekülen interpretiert wurde. Es ließ sich zeigen, dass so allgemeine Prozesse wie Diffusion und Osmose durch Prozesse dieser Art beschrieben werden können. Eine weitere Charakterisierung dieser Prozesse wurde von Norbert Wiener vorgenommen; der *Wiener-Prozess* ist eine Familie von Funktionen $W(t)$ mit den Eigenschaften

(i) $W(0) = 0$ fast sicher,

(ii) Für $t > s > 0$ sind die Zuwächse $W(t) - W(s)$ stochastisch unabhängig,

(iii) Die Zuwächse $W(t) - W(s)$ sind normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mathbb{E}(W) = 0$ und der Varianz $\sigma^2 = t - s$ für alle $0 \leq t \leq s$.

Für die Autokorrelationsfunktion gilt $Cov(W(t), W(s)) = \min(s, t)$. Die *Pfade* (*Trajektorien*) sind überall stetig, aber nirgends differenzierbar, d.h. die Pfade sind, salopp gesprochen, in sich total verknittert. Der Wiener-Prozess ist eine Formalisierung der Brownschen Bewegung. Ist $x(\cdot)$ ein Pfad eines Zufallsprozesses und existiert die Ableitung $x'(t) = dx(t)/dt$ für $t$ aus einem Intervall, so ist $x'(\cdot)$ ebenfalls ein Pfad eines Zufallsprozesses. Da die Pfade $W(\cdot)$ überall zerknittert und deswegen nicht im üblichen Sinne differenzierbar sind, sollte ein Prozess $W'$ nicht existieren. Man kann aber die Ableitung in einem allgemeineren Sinne definieren, worauf hier nicht weiter eingegangen werden kann, und diese Definition auf die $W(\cdot)$ anwenden. Dann entsteht ein Prozess, dessen Pfade durch Funktionen $\xi(\cdot)$ charakterisiert sind, die sich durch bizarre Eigenschaften auszeicnen: für beliebiges $t$ und beliebiges $dt > 0$ sind die Werte $\xi(t)$ und $\xi(t + dt)$ unkorreliert. Da $dt$ beliebig klein sein darf, sind die Werte von $\xi(t)$ und $\xi(t + dt)$ auch bei beliebig kleiner Nachbarschaft unkorreliert. Es läßt sich zeigen, dass die Energie "hinter" diesen wilden Oszillationen unendlich sein muß, damit diese Form der Unabhängigkeit erreicht werden kann, was physikalisch unmöglich ist. Dieser Unmöglichkeit entspricht die Tatsache, dass die $W(\cdot)$ eben im üblichen Sinne nicht differenzierbar sind. Gleichwohl hat der Prozess $\xi_t$, also die Familie der Funktionen $\xi(\cdot)$, gerade auch für die Praxis nützliche Eigenschaften. Es läßt sich nämlich zeigen, dass ein beliebiger Pfad $\xi(\cdot)$ stets als Überlagerung von Sinus-Kurven darstellbar ist, wobei die Frequenz $\omega = 2\pi f$ alle möglichen Werte durchläuft und die Amplitude $|H(\omega)|$ für alle Kurven gleich ist. Da weißes Licht als Überlagerung aller möglichen Frequenzen darstellbar ist, spricht man in Analogie hierzu von $\xi_t$ als *weißem Rauschen.* Die praktische Bedeutung des weißen Rauschens ergibt sich aus der Tatsache, dass $|H(\omega)| =$ konstant für alle $\omega$; diese Eigenschaft gilt *bereichsweise* für eine Reihe von Prozessen und führt zu beträchtlichen mathematischen Vereinfachungen.

Diese Eigenschaft war allerdings nicht der Ausgangspunkt der Betrachtungen von Langevin[5], der das Einsteinsche Modell mit den Gleichungen

[5] Paul Langevin, 1872 - 1946, französischer Physiker

der Mechanik zusammenbringen wollte. Langevin ging von einer gewöhnlichen, also deterministischen Differentialgleichung aus und addierte einen Term, der die zufälligen Fluktuationen repräsentiert:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x(t), t) + b(x(t), t)\xi(t), \tag{1.27}$$

wobei $\xi(t)$ ein Pfad des weißen Rauschens ist. Es kann gezeigt werden, dass $x(\cdot)$ nun ein Pfad eines algemeinen Diffusionsprozesses ist, wobei $a(x(t), t)$ die Drift und $b(x(t), t)$ die Diffusion des Prozesses charakterisiert. Multipliziert man formal mit $dt$ und integriert, erhält man die Darstellung

$$x(t) = \int_{t_0}^{\tau} x(\tau), \tau)d\tau + \int_{t_0}^{\tau} b(x(\tau), \tau)\xi(\tau)d\tau \tag{1.28}$$

Das erste Integral ist ein gewöhnliches Integral, das zweite wegen der bizarren Eigenschaften von $\xi$ nicht. Da $\xi_t$ formal der Derivierten eines Pfades des Wiener-Prozesses entspricht, also symbolisch $\xi(t) = dW(t)/dt$ wird auch $\xi(t)dt = dW(t)$ geschrieben; zu erklären ist nun, was mit dem *stochastischen Integral*

$$I(t) = \int_{t_0}^{\tau} b(x(\tau), \tau)dW(\tau) \tag{1.29}$$

gemeint ist. Die mathematische Behandlung dieses Ingtegrals muß hier übergangen werden. Es genügt, festzustellen, das $I(t)$ wiederum einen stochastischen Prozess beschreibt, der *kein* weißes Rauschen und insofern eine Approximation an die Wirklichkeit darstellt. Wie schon angedeutet, ist $x(t)$ unter sehr allgemeinen Bedingungen an den Driftterm $a$ und den Diffusionsterm $b$ eine Trajektorie eines Diffusionsprozesses und beschreibt damit einen Prozess, der eine große Klasse natürlicher Prozesse beschreibt. Intuitiv läßt sich vielleicht sagen, dass diese Prozesse alle durch eine dichte Folge von Stössen charakterisiert sind, wobei die Bedeutung von "dicht" natürlich noch spezifiziert werden muß, was hier aber übergangen wird. Man denke etwa an einen *Random Walk*: er besteht in einer Folge von Schritten, wobei ein Teilchen bei jedem Schritt mit einer Wahrscheinlichkeit $p$ nach links oder mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ nach rechts, jeweil um einen Betrag $s$, gestoßen wird. Die Schrittfolge kann nun beliebig dicht gemacht werden, $p$ kann als Funktion der Zeit definiert werden, und $s$ muß entsprechend klein werden. (1.28) beschreibt dann eine Verallgemeinerung dieser intuitiven Interpretation.

Es ist klar, dass $x(t)$ nicht mehr eindeutig vorausberechnet werden kann; es können allenfalls Wahrscheinlichkeiten für die Werte von $x$ angegeben werden. Alternativ dazu kann man Trajektorien $x(\cdot)$ numerisch berechnen, gegeben eine Trajektorie $\xi(\cdot)$. Der genaue Verlauf von $x(\cdot)$ hängt natürlich vom Verlauf von $\xi(\cdot)$ ab; trotzdem lassen sich bestimmte allgemeine Charakteristika der $x(\cdot)$ aus der Berechnung einzelner Trajektorien ablesen.

Für einen tatsächlich beobachteten Prozess ist diese Berechnung natürlich nicht möglich, da $\xi(\cdot)$ ja nicht bekannt ist. Obwohl also der Verlauf von $x(\cdot)$ einerseits durch $a(x,t)$ und andererseits durch die "Folge" der Stöße, die durch $I(t)$ spezifiziert werden, bestimmt wird, ist $x(\cdot)$ nicht (deterministisch) vorhersagbar. Dies verweist bereits auf den Sachverhalt, dass der Begriff Determinismus den der Vorhersagbarkeit nicht impliziert.

### 1.5 Chaos

Nach Schuster (1984) geht der Begriff "Chaos" auf das griechische $\chi\alpha o\varsigma$ zurück, das ursprünglich den unendlichen, leeren Raum bezeichnete, der vor allen Dingen existiert haben soll. Über die römische Interpretation von Chaos als einer ursprünglichen, ungeordneten Masse, in die der *große Architekt der Welt* Ordnung und Harmonie brachte wandelte sich der Begriff zur heutigen Interpretation als eines Zustands der Unordnung und Irregularität.

Deterministische Systeme, die also durch deterministische Differentialgleichungen beschrieben werden, scheinen mit dem Begriff des Chaos inkompatibel zu sein. Schließlich entwickelt sich ein Zustand des Systems kontinuierlich aus dem vorangegangenen Zustand. Allerdings bemerkte bereits H. Poincaré (1892) bei Untersuchungen zur Stabilität von Planetensystemen, dass bestimmte deterministische Systeme chaotische Bewegungen hervorbringen können. Die meisten Physiker betrachteten allerdings chaotische Bewegung als eine für die Naturbeschreibung irrelevante Kuriosität, und erst Lorenz (1963) fand im Zusammenhang mit meteorologischen Untersuchungen, dass schon drei gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungen eine chaotische Dynamik zeigen konnten. Es zeigte sich, dass diese Art von Dynamik sehr viel häufiger vorkommt, als man bisher angenommen hatte. Man kann zunächst einmal zwei Eigenschaften von Systemen angeben, die chaotisches Verhalten implizieren können: (i) das System muß nichtlinear sein; Nichtlinearität ist allerdings keine hinreichende Bedingung für das Auftreten von Chaos, und (ii) die Konstanten des Systems müssen Werte haben derart, Trajektorien, die für bestimmte Anfangswerte kurz nach dem "Start" des Systems sehr nahe beieinander sind, sich exponentiell voneinander entfernen. Da Anfangswerte nicht *beliebig* genau angegeben werden können, wird das Verhalten des Systems deshalb nicht mehr vorhersagbar; die "Fehler" wachsen exponentiell mit der Zeit. Dies ist die *sensitive (empfindliche) Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen*, die von Lorenz (1963) der *Schmetterlingseffekt* genannt wurde. Wegen der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen könnte der Flügelschlag eines Schmetterlings einen Wetterumschlag bewirken.

Eine vorzügliche Einführung in die Theorie chaotischer Systeme, d.h. Systeme, in denen eine chaotische Dynamik auftreten kann, liefert Schuster (1984); eine gut lesbare Darstellung, die ohne Mathematik auskommt, findet man bei Ruelle (1993), und Holden (1987) enthält eine Reihe von Darstellungen, die chaotische Dynamiken in verschiedenen Klassen von Systemen beschreiben. Für die Zwecke dieses Skriptums ist es nur wichtig, zu sehen, dass bei bestimmten Systemen, die allerdings wegen ihrer Struktur auch bei Aktivator-Inhibitor-Systemen und damit für die Physiologie und Psycholgie interessant sind, wegen der extremen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen nicht vorhersagbare, chaotische Dynamiken auftreten können. Ihr Verhalten wirkt zufällig, obwohl sie keine stochastischen Systeme sind.

# 2 Kausalität und Determiniertheit

*Es ist doch immer bei der Kantischen Philosophie eine Hauptfrage, wodurch erhält er Gewißheit, dass manche Erkenntnisse a priori sind? z. E. von dem Principio der Kausalität, das ist ja doch auch Erfahrung, so gut als dass es eine solche objektive Abhängigkeit gibt.*

Georg Christoph Lichtenberg

## 2.1 Zum Begriff der Ursache

Die Auffassung, dass jedes Ereignis eine Ursache haben muß, hat eine lange Tradition. Explizit formuliert wurde sie bereits von Parmenides und Demokrit[6]: "Nichts geschieht ohne Ursache, sondern alles hat einen zureichenden Grund." Bei Platon, Aristoteles, Descartes, Leibniz, Kant und anderen findet man ähnliche Aussagen. Leibniz schreibt: "Im Sinne des zureichenden Grundes [raison suffisante] finden wir, dass keine Tatsache als wahr oder existierend und keine Aussage als wahr betrachtet werden kann, ohne dass ein zureichender Grund vorhanden wäre, warum es so ist und nicht anders ..." (Monadologie, § 33, Nr. 32). Eine historische Betrachtung kann und muß hier nicht angestellt werden, es geht um die Analyse des Begriffs der Ursache, der Kausalität und damit verwandter Begriffe wie Determiniertheit, Vorhersagbarkeit und Zufall. Für die Psychologie ist eine solche Analyse von Interesse, weil u.a. von einigen Anhängern einer geisteswissenschaftlichen Psychologie argumentiert wird, das Ursache-Wirkungs-Prinzip der Naturwissenschaften könne nicht auf das Psychische übertragen werden; schon das Merkmal der Intentionalität vieler psychischer Prozesse oder Zustände verbiete dies. Die Frage ist allerdings, warum das Psychische eine Ausnahme bilden soll.

[6]Helmut F. Spinner: Begründung, Kritik und Rationalität. Bd. I. Vieweg Braunschweig 1977

Tatsächlich ist es schwierig, sich Ereignisse vorzustellen, die nicht in irgendeiner Weise verursacht worden sind. Andererseits ist es leicht, sich klar zu machen, dass der Begriff der Ursache schwer zu fassen ist. Kann man sagen, das Umlegen eines Schalters "bewirke", dass das Licht angeht, dass also das Umlegen des Schalters die Ursache dafür ist, dass das Licht angeht? Vielleicht ist eher der Wille der Person, die den Schalter umlegt, die Ursache, oder aber die Bewegung der Elektronen im Glühfaden der Lampe. Was als Ursache betrachtet wird, scheint vom Bezugsrahmen abzuhängen, in Bezug auf den das in Frage stehende Ereignis betrachtet wird. Die mangelnde Eindeutigkeit ist für die Praxis sicher nicht unproblematisch – man denke an die Ursachenforschung bei Unfällen, die u.a. juristische Implikationen haben kann. Ein anderres Beispiel ist etwa die schon von John Stuart Mill und Bertrand Russell diskutierte Tag-Nacht-Folge: man könnte auf die Idee kommen, dass es Tag wird, weil die Nacht den Tag verursacht, der dann wieder die Nacht verursacht. Das Tageslicht könnte sich während des Tages aufbrauchen, und ein Tag wird durch die Zeitdauer erklärt, die benötigt wird, um das Licht aufzubrauchen. Jahreszeitliche Schwankungen der Tagesdauer lassen sich durch weitere Annahmen erklären, etwa durch die Existenz eines Wesens, das langsam ein und ausatmet und beim Einatmen (im Winter) einen Teil des notwendigen Lichtstoffes mit einsaugt, ihn aber beim Ausatmen (im Sommer) wieder freigibt. Der Lichtstoff wird nächtens in einem noch unbekannten Produktionsvorgang wieder hergestellt, über den man ebenfalls interessante Spekulationen anstellen kann, etc. Was eine Ursache ist, hängt von der betrachteten Theorie ab, und da eine Theorie nicht notwendig auch wahr ist, kann der Schluß von der Ursache auf die Wirkung nicht logisch *zwingend* sein, wie bereits David Hume gezeigt hat (vergl. Wissenschaftstheorie II, p. 36). Kant (1783)[7] versuchte, zu zeigen, dass zwischen dem logischen Grund und dem "Realgrund" – der Ursache – ein Unterschied besteht, der in der rationalistischen Metaphysik vernachlässigt worden sei. Dort sei angenommen worden, dass zwei Ereignisse nur dann über die Begriffe Ursache und Wirkung miteinander verknüpft werden können, wenn der Begriff des als Wirkung charakterisierten Ereignisses logisch in dem Begriff des als Ursache charakterisierten Ereignisses enthalten sei; dann kann ja aus der Ursache die Wirkung logisch gefolgert werden und es bedarf keiner empirischen Stützung dieses Schlusses. Kausalzusammenhänge können diesem Ansatz nach logisch gefolgert werden. Damit kann dann die Wirklichkeit logisch und ohne Beobachtungen erschlossen werden. Kants Unterscheidung zwischen dem logischen Grund einerseits und dem Realgrund andererseits ist ein Angriff auf diese rationalistische Position.

Es sollen zunächst einige Standardansätze in der Diskussion von Ursa-

[7]Versuch, den Begriff einer negativen Größe in die Weltweisheit einzuführen, vergl. Wissenschaftstheorie III

che und Wirkung vorgestellt werden:

1. **Die Regularitäts- oder nomologische Analyse:** Sie geht auf David Hume und John Stuart Mill zurück. Demnach soll eine bestimmte Regelmäßigkeit zwischen Ursache und Wirkung bestehen. Es seien $A$ und $B$ Klassen von Ereignissen; Ereignissen der Klasse $A$ folgen regelmäßig Ereignisse der Klasse $B$. Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt dann $a \to b$, d.h. $a$ bewirkt $b$. Die kann natürlich eine reine Korrelation ohne "echten", ursächlichen Zusammenhang ausdrücken. Damit die Beziehung ursächlich genannt werden kann, kann man noch eine "nomologische Notwendigkeit", also die Existenz eines Gesetzes fordern. Eine schärfere Forderung ist die nach einem Kausalgesetz.

   **Problem:** diese Definition deckt sicherlich nicht ab, was mit dem Begriff der Ursache jeweils gemeint ist. So bewirkt eine bestimmte Dosis Schnupfenviren gelegentlich, aber nicht notwendig immer dann, wenn eine Person ihr ausgesetzt ist eine Infektion. Andererseits wird man keinen Schnupfen bekommen, wenn man nicht infiziert worden ist, – von Heuschnupfen einmal abgesehen. Es scheint, dass mit Kausalität eine *notwendige* Bedingung gemeint ist, wenn man sagt, die Virusinfektion sei die Ursache des Schnupfens: ist die Bedingung nicht erfüllt, gibt es auch keinen Schnupfen. Aber eine notwendige Bedingung ist nicht notwendig auch hinreichend. Diejenigen Bedingungen, die zwar nicht notwendig sind, aber ebenfalls erfüllt sein müssen, damit sich Schnupfen einstellt, müßten auch mit zu den Ursachen gezählt werden.

2. **Kontrafaktische Analyse:**[8] Man versucht, den Begriff der Ursache zu fassen, indem man sagt: Wenn das Ereignis $a$ das Ereignis $b$ bewirkt, also Ursache für $b$ ist, so kann man sagen, dass $b$ nicht eingetreten wäre, wäre $a$ nicht eingetreten. Also: das Ereignis $a$ bewirkt das Ereignis $b$ deswegen, weil $b$ nicht eingetreten wäre, wäre $a$ nicht eingetreten. Demnach ist die Ursache $a$ wiederum als eine notwendige Bedingung für $b$ erklärt.

   **Problem:** Eine Familie verreist und bittet die Nachbarin, die Blumen zu gießen. Die Blumen vertrocknen, weil die Nachbarin vergessen hat, die Blumen zu gießen. Hätte sie das Gießen nicht vergessen, wären die Blumen nicht vertrocknet. Das Vergessen des Gießens ist also die Ursache für das Vertrocknen der Blumen. Die Blumen wären allerdings auch nicht vertrocknet, wenn der Papst sie gegossen hätte. Die Tatsache, dass der Papst die Blumen nicht gegossen hat, ist dann die Ursache für ihr Vertrocknen. Einer solchen Folgerung stimmt man nicht gerne zu; man kann die Tatsache, dass der Papst die Blumen

[8] counterfactual analysis

nicht gegossen hat, als *nicht-kausales Kontrafaktum* bezeichnen, aber solche Bezeichnungen tragen offenkundig nicht wesentlich zur Klärung bei.

Die kontrafaktische Definition der Kausalität wurde hauptsächlich von Lewis (1973) ausgeführt[9]. Es seien $a$ und $b$ zwei Ereignisse, und $a$ verursache $b$. Die Bedeutung dieser Aussage läßt sich spezifizieren, indem man weitere Ereignisse $a_1, a_2, \ldots, a_n$ angibt, für die gilt, dass $a$ nicht eingetreten wäre, wenn $a_1$ nicht eingetreten wäre, und wenn $a_1$ nicht eingetreten wäre, so wäre $a_2$ nicht eingetreten, etc, und wäre schließlich $a_n$ nicht eingetreten, so wäre $b$ nicht eingetreten. Der Begriff der Kausalität wird also mit dem der Kausalkette verknüpft.

3. **Teleologische Aspekte:** Bei der Beschreibung von Ursache-Wirkungsgefügen wird i.a. stillschweigend vorausgesetzt, dass die Ursache der Wirkung vorausgeht. Die zeitliche Ordnung der Ereignisse ist wichtig. Es wird gelegentlich argumentiert, dass ein in der Zukunft liegendes Ziel als Ursache wirken könne. Man möchte, dass zu einem zukünftigen Zeitpunkt $t_0$ das Licht im Flur angeht. Also stellt man *jetzt* die Schaltuhr so ein, dass der Lichtschalter zum Zeitpunkt $t_0$ betätigt wird. Das Argument kann allgemeiner gefasst werden: die Evolution ist so angelegt, dass der Mensch am Ende als Krone der Schöpfung dasteht.

   **Problem:** Abgesehen davon, dass eine solche Behauptung vermutlich falsch ist, hat sie für den Kausalitätsbegriff auch wenig Relevanz, weil man argumentieren kann, dass z.B. der Entschluß, dass Licht zum Zeitpunkt $t_0$ angehen zu lassen, oder den Menschen als Krone der Schöpfung entstehen zu lassen, vor dem Eintreten des Ereignisses gefasst wurde und damit in eine zeitlich geordnete Kausalkette eingebettet ist.

4. **Absichten als Ursachen** Dass Absichten Ursachen sein können, wurde oben anhand des Beispiels des Lichts im Flur angedeutet: das Licht wurde angeschaltet, *weil* es im Flur dunkel war, und *weil* man die Absicht hat, im Flur etwas zu sehen.

   **Problem:** Es ist offenkundig, dass der Begriff der Ursache hier sehr vage ist, denn man kann sofort weiter danach fragen, ob nicht die wirkliche Ursache darin liegt, dass man überhaupt etwas im Flur sehen muß oder will. Das folgende, auf Michael McDermott (1995) zurückgehende Beispiel verweist auf eine weitere Schwierigkeit. Zwei Personen A und B haben jede einen Schalter vor sich, den sie nach rechts oder links umlegen können. Legen A und B ihren Schalter in die gleiche

[9] Es gibt eine größere Anzahl weiterer Arbeiten zu diesem Thema.

> Richtung, so bekommt eine dritte Person C einen Elektroschock. Die Person A möchte nicht an der Verursachung eines Schocks beteiligt sein. Da A nun sieht, dass die Person ihren Schalter nach links gelegt hat, bewegt sie ihren Schalter nach rechts. Die Person B möchte aber die Person C schocken. Da B sieht, dass A den Schalter nach rechts gelegt hat, legt B nun den Schalter ebenfalls nach rechts. Also hat A verursacht, dass C einen Schock erhält, denn nur weil sie den Schalter nach rechts gelegt hat, legt auch B den Schalter nach rechts, weshalb C nun den Schock bekommt. Natürlich wollte A gerade nicht, dass C geschockt wird, also macht es nicht viel Sinn, die Person A als Verursacherin des Schocks zu betrachten. Andererseits "verursacht" aber A stets den Schock, so lange es möglich ist, dass sich B an der Schalterstellung von A orientiert, um C zu schocken.

Akzeptiert man den Satz, dass Ereignisse eine Ursache haben müssen, wird man schnell zum Begriff der Kausalkette geführt, denn die Ursache ist ein Ereignis das seinerseits eine Ursache haben muß, etc. Wendet man den Kausalbegriff konsequent an, so muß man folgern, dass die Kausalkette entweder unendlich weit zurück reicht oder ein Anfangsereignis hat, dass ohne Ursache eingetreten ist. Der Wille Gottes zum Beispiel, – man könnte auf die Idee kommen, auf diesem Gedanken einen Gottesbeweis aufzubauen. Diese Idee soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

## 2.2 Kritik: Russell, Mach, Planck, Exner

> *Schon der Versuch eines ernsthaften kausalen Verständnisses der kräftefreien Bewegung führt also in der bisherigen Physik ins Dunkle. Unter dem Einfluß einer empiristischen Philosophie hat man sich bloß daran gewöhnt, das Unverständliche schlicht zu behaupten.*
> *C.F. v. Weizsäcker, Aufbau der Physik, p. 245*

Die vielfach am Begriff der Ursache und damit am Begriff der Kausalität geübte Kritik soll durch die Argumentation dreier Autoren, Ernst Mach (1838 – 1918), Bertrand Russell (1872 – 1972), und Franz-Serafin Exner (1802 – 1853) illustriert werden.

Analysiert man den Begriff der Ursache, so scheint er sich zu verflüchtigen. Bertrand Russell hat dementsprechend schon (1912)[10] festgestellt und illustriert, dass der Begriff der Ursache "unentwirrbar" mit "irreführenden

[10] Russell, B., 1912, "On the Notion of Cause," Proceedings of the Aristotelian Society, 13: 1-26. Ebenfalls: Russel, B.(1917) "On the Notion of Cause" Ch. IX in Mysticism and Logic and Other Essays. London: Unwin, 1917, 1963. Deutsch: Über den Begriff der Ursache. In: Russel, B.: Mystik und Logik. Humboldt Verlag, Wien - Stuttgart, 1952

Assoziationen" verknüpft ist. Es sei wünschenswert, diesen Begriff überhaupt aus dem Wortschatz der Philosophie zu streichen. Das Kausalgesetz sei nach Meinung der Philosophen ein Axiom der Naturwissenschaft, - doch komme der Kausalitätsbegriff zumindest in den fortgeschritteneren Wissenschaften gar nicht vor. Das Kausalgesetz sei "eine Reliquie aus vergangenen Zeiten", die sich "wie die Monarchie nur deswegen am Leben erhielt, weil man ganz zu Unrecht annahm, dass sie keinen Schaden stifte". Das Prinzip "Gleiche Ursachen, gleiche Wirkung" liege nur nach Vorstellung der Philosophen den Naturwissenschaften zugrunde. Manche Philosophen, so Russell, scheinen den Begriff der Ursache mit dem des Wollens zu verbinden. Für die Theorienbildung in der Psychologie sei diese Assoziation von Bedeutung, weil sie der Meinung zu unterliegen scheint, dass der Geist (mens, mind) nicht aus der Materie entstanden sein kann, denn es müsse einen intelligiblen *nexus*[11] zwischen Ursache und Wirkung geben. Der Ausdruck "intelligibel" ist aber in diesem Zusammenhang unklar, er scheint nicht mehr zu bedeuten, als dass man sich den Zusammenhang vorstellen kann. Russell führt aus, dass die Konstanz der Naturgesetze nicht auf einer Gleichheit von Ursache und Wirkungen beruhe, sondern auf einer Konstanz von Relationen, und dieser Begriff wird präzisiert durch den Begriff der Gleichheit von Funktionen bzw. von Differentialgleichungen (deren Lösung Funktionen sind). Der Begriff der Funktion solle an die Stelle des Begriffs der Kausalität treten (eine analoge Auffassung wurde auch von Ernst Mach vertreten, s. weiter unten). Betrachtet man das Fallgesetz $s(t) = gt^2/2$ (es wird angenommen, dass der Fall in $t = 0$ beginnt), demzufolge die durchfallene Strecke $s$ proportional zum Quadrat der Zeit ist, so gilt es unter bestimmten Randbedingungen (freier Fall im Vakuum). Die Konstante $g$ hängt – ein bißchen – von der Position auf der Erde ab, der Körper sollte im Vakuum fallen, denn eine Feder fällt wegen des für Kugel und Feder verschiedenen Luftwiderstandes tatsächlich langsamer als eine Bleikugel, wenn beide Gegenstände nicht im Vakuum fallen, etc. Das Wesentliche ist aber, dass die Formel $s(t) = gt^2/2$ nicht bedeutet, dass die Zeit $t$ die durchfallene Strecke $s$ *bewirkt*. Denn da sich aus dem Gesetz die Formel $t = \sqrt{2s(t)/g}$ ableiten läßt, müßte man dann auch folgern, dass die Strecke $s$ die Zeit $t$ "bewirkt". Diese Aussage macht wohl nur Sinn, wenn den Ausdruck 'bewirkt' im eher übertragenen Bedeutung versteht, nämlich im Sinne einer Zuordnnung: dem Wert von $s$ wird ein Wert von $t$ zugeordnet, $s \mapsto t$. Funktionale Beziehungen sind nicht äquivalent zu kausalen Beziehungen. Mach (1922) stellt in seinen *Antimetaphysischen Vorbemerkungen* die "alte, hergebrachte Vorstellung" von der Kausalität als "etwas ungelenkig" vor: er schreibt "einer Dosis Ursache folgt eine Dosis Wirkung. Es spricht sich hierin eine Art primitiver, pharmazeutischer Weltanschauung aus, wie in der Lehre von den vier Elementen". Schon im Wort *Ursache* werde dies deut-

[11]lat. für Verbindung

lich, aber "Die Zusammenhänge in der Natur sind selten so einfach, daß man in einem gegebenen Falle *eine* Ursache und *eine* Wirkung angeben könnte." Mach schlägt vor, den Ursachenbegriff durch den mathematischen Funktionsbegriff zu ersetzen, denn es ginge um "die Abhängigkeiten der Erscheinungen von einander". Dieser Begriff wiederum könne "je nach der Forderung der untersuchten Tatsachen", beliebig eingeschränkt oder erweitert werden. Mach erläutert diese Aussage am Beispiel gravitierender Massen: tritt eine Masse A einer anderen Masse B gegenüber, so erfolge eine Bewegung von A nach B; dies sei "die alte Formel". Genauer betrachtet würden sich aber die Massen A, B, C, ... gegenseitig beschleunigen, und die gegenseitige Beschleunigung sei gleichzeitig mit der "Setzung der Massen" gegeben. Allgemein – also nicht nur in diesem einfachen Beispiel – liefe es auch in anderen Fällen auf gegenseitige Abhängigkeiten hinaus, über die dann nichts Allgemeines gesagt werden kann, sondern nur das, was sich in der Spezialforschung ergebe. Mach spricht dementsprechend von *gegenseitigen Simultanbeziehungen*, und die gelten auch für biologische Zusammenhänge. Man kann sagen, dass die Machsche Argumentation auf eine Beschreibung der Zusammenhänge durch Systeme von Differentialgleichungen hinausläuft, auf die in Abschnitt 1 kurz eingegangen wurde.

Mach hat aber noch auf eine andere Interpretation des Ursachenbegriffs verwiesen. Er geht dabei vom alltäglichen Sprachgebrauch aus (vergl. Scheibe (2007), p. 219) und verweist darauf, dass wir im Allgemeinen *nicht* von Ursachen sprechen, wenn von Regelmäßigkeiten die Rede ist. Der Begriff der Ursache taucht dann auf, wenn der normale Ablauf der Dinge durch ein unvorhergesehenes Ereignis durchbrochen wird. Der normale Ablauf sei durch Determiniertheit charakterisiert und habe wiederum die Abgeschlossenheit des jeweils betrachteten Systems zur Voraussetzung. Die Planetenbewegungen sind ein typisches Beispiel: die Keplerschen Gesetze enthalten keine Größen, die direkt als Ursache der Bewegung interpretiert werden können. Dies entspricht dem allgemeinen Befund über Ursachen in dynamischen Systemen. Störungen des Systems von Außen werden dagegen als *Ursachen* für die entsprechenden Reaktionen des Systems betrachtet. Die Beziehungen zwischen Größen in einem deterministischen System zeigen Zeitreversibilität, Störungen von Außen dagegen nicht. Hundt (1970) illustriert dies am Blitz, der ein Haus trifft, das als Resultat des Einschlags abbrennt. Die Umkehrung, dass das Haus abbrennt und als Resultat ein Blitz einschlägt, kommt nicht vor: *Kausalität [in diesem Sinne] unterscheidet zwischen Vergangenheit und Zukunft.* Es folgt, dass die Diskussion von Kausalität an eine Unterscheidung von offenen und abgeschlossen Systemen gekoppelt ist.

Andererseits sind physikalische Prozesse wie die Wärmeleitung, die Radioaktivität, oder die Charakterisierung der Aktivität neuronaler Systeme nicht durch deterministische Gesetze beschreibbar, allenfalls die mittlere

Wärmeleitung, die durchschnittliche Zerfallszeit oder die mittlere neuronale Aktivität. Das Verhalten einzelner Teilchen oder einzelner Neurone wird durch Hinzunahme von Wahrscheinlichkeiten beschrieben. Hier kann zwischen zwei Konzeptionen unterschieden werden: (i) die Wahrscheinlichkeiten sind als epistemische Größen zu verstehen, d.h. sie drücken mangelndes Detailwissen aus, oder (ii) sie repräsentieren nicht weiter reduzierbare Größen, wenn nämlich die Prozesse akausale Komponenten enthalten. Man sagt kurz, die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten seien irreduzibel. In diesem Zusammenhang kam es zu einer Diskussion zwischen Max Planck und dem Physiker Exner.[12] (Scheibe (2007), p. 228). Planck vertrat die Ansicht, dass einerseits Ereignisse genau dann kausal bedingt sind, wenn sie mit Sicherheit vorausgesagt werden können. Andererseits argumentierte Planck, dass es in keinem einzigen Fall möglich sei, ein physikalisches Ereignis exakt vorauszusagen; dies sei eine "festliegende Tatsache". Daraus folgt dann, dass man in keinem Fall zu einer Kausalaussage gelangen kann. Poincaré (1905/1952)[13] argumentiert, dass selbst dann, wenn die Naturgesetze selbst kein Geheimnis mehr enthielten, die jeweiligen Anfangszustände nur näherungsweise bekannt sein würden; kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen können dann zu großen Unterschieden zu späteren Zeitpunkten führen. "Die Vorhersage würde unmöglich, und wir haben eine zufällige Erscheinung". Diese Argumentation wird noch einmal elaboriert in Suppes (1993), siehe Wissenschaftstheorie III, Abschnitt 2.2.5.

Exner, wie auch sein Schüler Schrödinger, ging von der Überlegung aus, dass die empirische Entscheidung über die Geltung exakter physikalischer Gesetze unmöglich sei (Scheibe 2007, p. 231). Die stets existierenden Meßfehler implizieren, dass gemessene Größen grundsätzlich nur Durchschnittsgrößen seien. Ein einfaches Beispiel ist gemessener Dampfdruck. Der Druck ist um so größer, je größer die Bewegungsenergie der Wassermoleküle ist mit der sie gegen den Messkolben prallen. Wegen der großen Zahl $n$ der Moleküle erscheint dann der Anteil $n_p/n$, $n_p$ die mittlere Anzahl der Moleküle pro Zeiteinheit, die gegen den Kolben prallen, ebenso die mittlere Energie, mit der sie das tun, als eine für alle praktischen Zwecke kontinuierliche Größe, die im Vergleich zur Bewegung einzelner Moleküle nur sehr langsam um den Mittelwert variiert. Exner (1922)[14], p. 669, fragt konsequenterweise, ob nicht auch die Gravitation oder die Energie eine statistische Größe sei. Würde man die Beschleunigung beim freien Fall nicht in Sekunden, sonden in Billionsteln von Sekunden messen, so fände man womöglich, dass sie sehr schnell variiert. Boltzman habe dieser Sichtweise zugestimmt: der fallende Körper könne sich ruckweise bewegen. Exner folgert, dass der Ver-

[12] Franz-Serafin Exner, 1849 - 1926, österreichischer Physiker

[13] In der deutschen Ausgabe von 1914 auf Seite 56

[14] Exner, F. S.:Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften. Leipzig 1922

such, das Kausalitätsprinzip aufrecht zu erhalten, bedeuten würde, dass Ursachen postuliert werden müssen, die das *durchschnittliche* Geschehen bestimmen, nicht aber die Einzelwerte. Diese Auffassung steht in Widerspruch zur üblichen Auffassung des Kausalitätsgesetzes, demzufolge auch die Einzelwerte exakt kausal determiniert sind:

> ... immer, wenn physikalische Erscheinungen aus vielen gleichartigen, voneinander unabhängigen Einzelereignissen resultieren,wirken die von den Deterministen vorausgesetzten Ursachen geradeso, als wenn im Ganzen keine Ursachen vorhanden wären, sondern der Zufall walten würde.
>
> Exner (1922), p. 681, zitiert nach Scheibe (2007), p. 233.

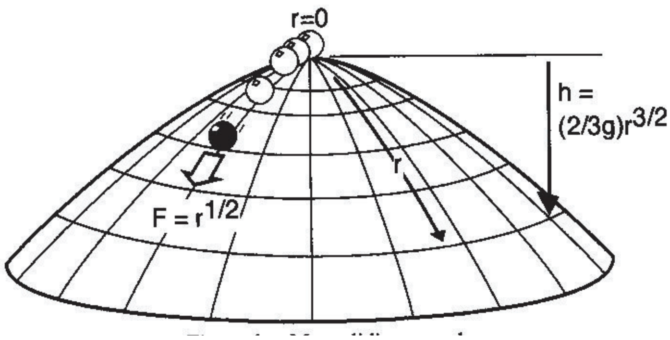
Scheibe (2007) sieht hierin eine Abwendung vom "verkappten Determinismus als notwendige Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie".

## 2.3 Das Ursache-Wirkungs-Prinzip als "Folk Science"

John Stuart Mill hat in seinem Buch "Logic" die Wissenschaft als eine systematische Suche nach Ursachen gekennzeichnet. Die Aussage wirkt so plausibel, dass sie wie eine Trivialität erscheint. Aussagen werden üblicherweise mit (Halb-)Sätzen begründet, die mit dem Wort 'weil' beginnen: die durchschnittliche Temperatur auf der Erde steigt, *weil* zu viel $CO_2$ in die Atmosphäre gelangt, und dies geschieht, *weil* zu viel fossile Energie verbraucht wird, etc. Alles hat seine Ursache. Die Frage ist also, ob der Begriff der Kausalität ein fundamentaler Begriff der Wissenschaft ist. Die Entwicklung der Quantenmechanik führte zum Begriff der "probabilistischen Kausation", der in Teilen der Statistik durchaus eine praktische und sinnvolle Anwendung findet (z.B. PPearls (2000)). Tatsächlich versucht man aber in wissenschaftlichen Untersuchungen nicht, bestimmte Ursachen zu finden, sondern Beziehungen zwischen Variablen zu bestimmen. Nagel (1961) schrieb dementsprechend, dass das Kausalitätsprinzip "a *maxim* for inquiry rather than a statement with definite empirical content" sei. Die Frage bleibt, zu was in der Welt der Ursachebegriff tatsächlich korrespondiert.

Norton (2003) argumentiert, dass der Begriff der Ursache in den "reifen Wissenschaften" (mature sciences) – gemeint ist die Physik, aber auch andere Naturwissenschaften – nicht als stabiler, faktenbezogener Begriff erscheint. In den Axiomen der newtonschen Physik, in der probabilistische Beziehungen zunächst gar nicht auftauchen, findet man den Begriff der Ursache als erklärenden, nicht weiter zu reduzierenden Begriff nicht. Man sagt zwar, dass ein Körper beschleunigt wird, *weil* eine Kraft auf ihn wirke, andererseits stehen die Begriffe Kraft ($F$) und Beschleunigung ($b$) in der Beziehung $F = mb$ zueinander, wobei die Proportionalitätskonstante $m$ die Masse des Körpers bezeichnet. Man könnte nun sagen, dass die Kraft

Abbildung 6: Akausale Bewegung: Nortons Kuppel




den Wert $F$ annimmt, *weil* die Beschleunigung den Wert $b$ und die Masse den Wert $m$ hat. Andererseits ist die Beschleunigung $b$ proportional zur Kraft, $b = (1/m)F$, und man könnte auf die Idee kommen, zu sagen, die Beschleunigung hat den Wert $b$, *weil* die Kraft den Wert $F$ hat, etc. Also ist die Kraft die Ursache für die Beschleunigung, und die Beschleunigung ist Ursache für die Kraft, – Kausalität als Ausdruck begrifflicher Selbstreferenz. Das Wort "weil" suggeriert Kausalität, repräsentiert sie aber nicht; keine der Gleichungen enthält ein Symbol für "Ursache". Norton liefert ein Beispiel, in der die deterministische newtonsche Physik ein Ereignis ohne Ursache beschreibt, – die newtonsche Physik liefert also keine Basis für die Begründung eines Kausalitätsprinzips. Im nortonschen Beispiel wird eine Masse beschrieben, die in einer absolut invarianten Umgebung liegt, d.h. es gibt keinerlei Veränderungen, die dazu führen, dass die Masse ihre Lage verändert. Aber dann, zu einem bestimmten Zeitpunkt $t_0$, beginnt sie, sich zu bewegen!

Dazu betrachtet Norton eine Kuppel, vergl. Abbildung 6. Dieses Dach ist in einer bestimmten Weise geformt, und aus den newtonschen Prinzipien läßt sich die Gleichung bestimmen, nach der die Masse – eine Kugel – das Dach hinunter rollt. Das Dach ist rotationssymmetrisch, und für jede Höhe $h$ existiert ein bestimmter Radius $r$, der der Beziehung $h = (2/3g)r^{3/2}$ genügt, wobei wie üblich $g \approx 9.81$. Die Masse der Kugel sei (der Einfachheit halber) gleich 1 und die Reibung sei vernachlässigbar. Die tangential zur Oberfläche der Kuppel wirkende Kraft ist durch $F = d(gh)/dr = r^{1/2} = \sqrt{r}$ gegeben. Auf die Kugel auf der Oberfläche wirkt nun eine Kraft $F = mb$ mit $b = d^2r/dt^2 = \sqrt{r}$, und wegen $m = 1$ erhält man[15]

$$F = b = \frac{d^2r(t)}{dt^2} = \sqrt{r}. \tag{2.1}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $r(t) = r(0) = 0$ und also $b = 0$, und dies bleibt

[15]Die Beschleunigung ist stets die zweite Ableitung der Ortskoordinate.

auch so für alle $t > 0$; die Kugel wird nicht bewegt.

Nun werde aber die Beziehung

$$r(t) = \begin{cases} (t-T)^4/144, & t \geq T \\ 0, & t < T \end{cases} \tag{2.2}$$

betrachtet, wobei $T \geq 0$ eine beliebige Konstante sei. Bildet man die zweite Ableitung, so erhält man die Beschleunigung

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = \begin{cases} (t-T)^2/12, & t \geq T \\ 0, & t < T. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sobald $t > T$, ist die Beschleunigung ungleich Null und die Kugel setzt sich in Bewegung, – ohne jede weitere Ursache, und auch ohne die Einführung zufälliger Effekte!

Ein mögliches Gegenargument ist, dass der vorangehende Befund dem ersten newtonschen Gesetz zu widersprechen scheint, demzufolge ein Körper, auf den keine externe Kraft einwirkt, in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung verbleibt. Am Gipfelpunkt der Kuppel wirkt in der Tat keine radiale Kraft und die Kugel verbleibt im Ruhezustand. Nach Gleichung (2.3) gilt für $t = T$ die Beziehung $d^2r(t)/dt^2 = (t-T)^2/12 = 0$ und es wirkt keine Kraft. Für *alle* $t > T$ ist aber $d^2r(t)/dt^2 > 0$ und es wirkt eine Kraft. Das Geheimnis liegt in der Form der Kuppel, – bei einer halbkugelförmigen Kuppel funktioniert die hier beschriebene Mechanik nicht. Trotzdem kann man nicht sagen, dass die Form der Kuppel die Bewegung der Kugel verursacht, denn zum Zeitpunkt $t = T$ tut die Kuppel nichts. Sie tut zu keinem Zeitpunkt etwas. Die Form der Kuppel *als Ursache* ist keine erklärende Begriffsbildung!

Norton betrachtet die Theorie der Kausalität analog zur newtonschen Theorie der Gravitation, derzufolge die Gravitation eine Kraft ist; nach Einstein ist Gravitation aber Ausdruck einer Raumkrümmung, oder analog zur kalorischen Theorie der Wärme, derzufolge Wärme "Kalorik", also eine unsichtbare und gewichtslose Flüssigkeit ist. Mit der newtonschen Gravitationstheorie kann man viel erklären, auch wenn sie falsch ist, ebenso mit der kalorischen Wärmetheorie. Ebenso kann man mit der Kausationstheorie viel erklären, – auch, wenn sie falsch ist, zumal die Kausationstheorie eine gewisse Systematik aufzeigt. In diesem Sinne sei sie, so Norton, "Folk Science". Das Vakuum ist ein weiteres Beispiel. Erzeugt man in einem Kolben ein Vakuum und öffnet ihn dann, so "saugt" das Vakuum Luft und u. U. auch Gegenstände an. Mit dieser Beschreibung kann man die Phänomene gut beschreiben, auch wenn die Theorie falsch ist. Tatsächlich saugt das Vakuum nicht, sondern der Druck der umgebenden Luft drückt Luft und eben möglicherweise auch Gegenstände in den Kolben hinein. "Causal talk" in der Wissenschaft habe den gleichen Status wie die Saugtheorie des Vakuums.

Nortons Argument ist hinsichtlich verschiedener Aspekte diskutiert worden. Dabei wurde deutlich, dass die eigentliche Frage ist, was genau mit der newtonschen Dynamik gemeint ist, denn die drei Grundgesetze oder Axiome Newtons sind notwendig unterbestimmt, einfach weil die mathematischen Grundlagen zu seiner Zeit noch nicht hinreichend entwickelt waren. Die aus den drei Axiomen abgeleiteten Bewegungsgesetze werden im Allgemeinen als Differentialgleichungen formuliert. Dabei ergibt sich die Frage der Eindeutigkeit der Lösungen dieser Gleichungen. Wie erst nach Newton deutlich wurde, erfordert die Eindeutigkeit der Lösungen, dass die in den Gleichungen spezifizierten Funktionen eine spezielle Form der Stetigkeitsbedingung erfüllen müssen, nämlich die *Lipschitz-Stetigkeit*[16]. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L < \infty$ existiert derart, dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \tag{2.4}$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Lipschitz-Stetigkeit bedeutet zunächst, dass sich die Funktionswerte $f(x)$ nicht zu stark mit den $x$-Werten verändern dürfen, – und diese Eigenschaft impliziert die Eindeutigkeit der Lösungen (Arnol'd (1980), p.215). Korolev (2007) argumentiert, dass diese Bedingung für dier Nortonsche Kuppel nicht erfüllt sei und daher die Aussage über die Indeterminiertheit der newtonschen Mechanik eigentlich nicht zutreffe; er nimmt also an, dass die Lipschitz-Stetigkeit eine essentielle Eigenschaft der newtonschen Mechanik sei. Vermutlich hatte Newton eindeutige Lösungen im Sinn, aber er hat die Forderung nach Eindeutigkeit nicht explizit formuliert.

Malement (2008) argumentiert im Prinzip ähnlich wie Korolev: die Nortonsche Kuppel habe an der Spitze eine *Singularität*, die Kurve, die die Kuppel definiert, ist $C^1$, nicht $C^2$, und sonst[17] $C^\infty$. Die von Norton konstatierte Undeterminiertheit ist eine Folge dieses Sachverhalts. Die Oberfläche der Kuppel ist "unendlich schlüpfrig", so dass die Kugel wegflöge, führte man nicht gleichzeitig eine Gegenkraft ein, die sie auf der Oberfläche hält. Insofern ist die Nortonsche Konstruktion "unphysikalisch". Man steht also wieder vor der Frage, was unter "newtonscher Dynamik" verstanden werden soll, – es wird anscheinend intuitiv gefordert, dass sie "vernünftig" sein soll, und sie ist dann "vernünftig", wenn keine Mehrdeutigkeiten wie bei Nortons Kuppel auftreten. Norton (2008) hat diese Einwände diskutiert und wie Fletcher (2010) argumentiert, dass es im Prinzip eine Frage der Pragmatik sei, ob man die newtonsche Theorie als deterministisch sehen

[16]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903), deutscher Mathematiker
[17]$C^1$ bedeutet einmalige Differenzierbarkeit, $C^2$ zweimalige, etc und $C^\infty$ bedeutet, dass die Funktion unendlich oft differenziert werden kann.

will oder nicht. Damit ist die Frage der Determiniertheit aber keine Frage nach einer Eigenschaft der newtonschen Mechanik mehr.

Nortons Kuppel verweist noch auf eine andere Eigenart der newtonschen Mechanik, nämlich auf die Annahme, dass die Zeit unabhängig vom Ort gleichmäßig fließt. Diese Annahme geht in alle Differentialgleichungen der Physik ein, weil die Zeit als unabhängige Variable in die Gleichungen eingeht – es wird dabei nicht weiter geklärt, *was* eigentlich die Zeit ist. In Nortons Kuppelargument hat sie eine nahezu kausale Rolle (was aber in der Diskussion der nortonschen Kuppel nicht weiter thematisiert wird): für $t \leq T$ gilt $r(t) = 0$, und erst für $t > T$ nimmt $r(t)$ Werte ungleich Null an. Man kann aber argumentieren, dass es die Zeit als eigenstständig fließende Größe gar nicht gibt. Aufgrund von Kräften entstehen Veränderungen, die auf eine konstruierte Zeitskala projiziert werden. Die Zeit als unabhängige Veränderliche in Differentialgleichungen zu verwenden ist elegant und bequem, verschleiert aber ihren Charakter als begriffliche Konstruktion. Dieser Charakter läßt aber das Nortonsche Kuppelargument als relativ sinnlos erscheinen. Denn nun ist die Definition von Kraft als einer Größe, die proportional zur zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit definiert ist, nicht mehr möglich, denn Zeit wird nun zu einer abhängigen Größe. Barbour (1999)[18]. Da es hier aber um Determiniertheit versus Indeterminiertheit geht, soll auf die Frage nach der Zeit an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

## 2.4 Determinismus

Der Determinismus ist, sehr allgemein gesprochen, die Lehre, dass der Ablauf aller aller Vorgänge in der Welt festliegt; insbesondere seien Naturgesetze nicht denkbar ohne die Annahme, dass alles Geschehen durch bestimmte Ursache-Wirkungsketten determiniert sei. Gelegentlich wird hinzugefügt, dass es den Zufall nicht gäbe. In der Wissenschaft und Philosophie hat der Erfolg der newtonschen Mechanik dazu beigetragen, die Idee des Determinismus zu einer nicht weiter hinterfragten Grundüberzeugung zu machen. Im Alltagsdenken scheint die vermutete Unwahrscheinlichkeit von Ereignissen den Glauben an ihre Vorherbestimmtheit und damit an einen allgemeinen Determinismus zu bestärken[19].

Die Frage ist, wie der Begriff des Determinismus definiert werden kann. Denn die intuitive Idee des Determinismus – alles Geschehen ist irgend-

[18]Barbour, J.: The End of Time. The next Revolution in Physics. Oxford University Press, Oxford 1999

[19]Herr X wohnt in Hamburg und Frau Y wohnt in München; sie haben vor dreißig Jahren zuletzt voneinander gehört. Nun treffen sie zufällig in einem Warteraum des Chicagoer Flughafens aufeinander, – und leben seitdem glücklich zusammen. Ist das Zufall oder Notwendigkeit?

wie festgelegt – evoziert sofort Gegenbeispiele, vom Wurf von Münzen und Würfeln bis zu Ereignissen im Leben, die einerseits zufällig erscheinen, andererseits grundsätzliche Richtungsänderungen in der Lebensführung bedeuteten. Der Streit über die Rolle von Zufall und Notwendigkeit ist endlos. Deswegen erscheint eine genaue Exegese der Aussage, eine Ereignisfolge sei determiniert oder eben nicht determiniert, sinnvoll zu sein.

Earman (1986) hat auf die Frage der Definition ein ganzes Kapitel verwendet, und in den folgenden Kapiteln seines Buches werden insbesondere physikalische Bedingungen für Determiniertheit untersucht, mit im Allgemeinen nicht eindeutigem Ausgang. Earman stellt eine Definition von William James (1956) an den Anfang, weil sie den intuitiven Begriff noch einmal auf den Punkt bringt:

> What does determinism profess? It professes that those parts of the universe already laid down absolutely appoint and decree what the other parts shall be. The future has no ambiguous possibilities hidden in the womb: the part we call the present is compatible with only one totality. Any further complement than the one fixed from eternity is impossible. The whole is in each and every part, and welds it with the rest into an absolute unity, an iron block, in which there can be no equivocations or shadows of turning.
>
> (Lecture an der Harvard Divinity School (1884), in James (1956), p. 150)

Die hier auftretenden Begriffe erinnern an die hegelsche Philosophie vom Ganzen:

> "Das Wahre ist das Ganze. Das Ganze aber ist nur das durch seine Entwicklung sich vollendende Wesen. Es ist von dem Absoluten zu sagen, das es wesentlich *Resultat*, dass es erst am Ende das ist, was es in Wahrheit ist, . . . (vergl. Wissenschaftstheorie III, Kapitel 6, Abschnitt 6.2)

in der zwar der Determinismus nicht explizit genannt wird, aber implizit gedacht zu werden scheint, wie die weiteren Betrachtungen über die Dialektik dann nahelegen. Das soll hier aber nicht weiter verfolgt werden. Earman (1986) jedenfalls nennt die Jamessche Definition das klassische Bild der Welt (the classical world picture) und weist auf eine wichtige Implikation hin: es wird – stillschweigend – eine bestimmte Raum-Zeit-Struktur angenommen, in der eine absolute, d.h. vom Beobachter unabhängige Simultaneität existiert. Die Welt ist in jedem Augenblick durch die Werte der relevanten physikalischen Variablen definiert, d.h. durch deren momentane Position und momentane Geschwindigkeit, durch die momentanen Werte der magnetischen und elektrischen Feldvektoren, etc. Wie Earman ausführt, werden mentale Aspekte hier mit einbezogen, sofern sie eine raum-zeitliche Repräsentation haben.

Nach dem von Aristoteles bis Leibniz immer wieder postulierten *Satz vom Zureichenden Grund* hat jedes Ereignis eine Ursache. Da die Ursache ebenfalls ein Ereignis ist, muß es ebenfalls eine Ursache haben, etc. Man kommt so zum Begriff der Kausalkette, der wiederum die Determiniertheit von Ereignissen suggeriert. Sofern dies für alle Ereignisse gelten soll, ist damit dann überhaupt jedes Ereignis in der Welt determiniert. Die Welt ist ein riesiges Uhrwerk, in dem *jedes* Ereignis bestimmt und damit auch *vorher*bestimmt ist. Dies ist die *starke Theorie des Determinismus.* Da unser Gehirn ein Teil der Natur ist, impliziert für manche Philosophen und Psychologen die Annahme, unser Bewußtsein werde durch Hirnprozesse bestimmt, in Konjunktion mit der Annahme der starken Theorie des Determinismus, dass der Mensch keinen freien Willen haben kann. Ob diese Schlußfolgerung zwingend ist, sei vorerst dahingestellt; es zeigt sich, dass schon der Begriff des Determinismus zu komplex ist, um eine solche Folgerung als gerechtfertigt erscheinen zu lassen. In der Theorie des *schwachen Determinismus* wird angenommen, dass eine Person genau dann frei handelt, wenn sie eine Handlung will, jedoch auch anders handeln könnte, wenn sie denn die alternative Handlung wollte. Es bleibt die Frage, warum sie etwas will, – will sie etwas, weil sie es wollen will, und welche Prozesse bewirken, dass sie etwas wollen will? Etwas zu wollen, schwächt für sich genommen den Determinismus noch nicht ab.

Der Begriff der Ursache hat sich bereits als dunkel erwiesen, und dieses Merkmal vererbt sich deshalb auf den Begriff der Kausalkette, so dass die Rückführung des Begriffs des Determinismus auf den der Ursache nicht zufriedenstellend ist. Im Alltagsdenken wird oft von einer vermuteten Unwahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf dessen Determiniertheit geschlossen. Dieser Schluß ist schon deswegen gewagt, weil er von einem Begriff des Zufalls ausgeht, der als Negation von Determiniertheit gedacht wird, und Determiniertheit wiederum soll die Negation von zufällig sein. Setzt man die Begriffe Zufall und Determiniertheit in dieser Weise zueinander in Beziehung, läuft man in eine definitorische Zirkularität, denn um zu wissen, was Determiniertheit bedeuten soll, muß man nun wissen, was "zufällig" bedeuten soll, und um zu wissen, was "zufällig" bedeutet, muß man wissen, was "determiniert" heißt. Zudem muß "zufällig" nicht bedeuten, dass das in Frage stehende Ereignis nicht determiniert ist, denn der Begriff des Zufalls kann ja auch epistemisch gedeutet werden: ein Ereignis $E$ ist demnach "zufällig", wenn die Kausalketten, die zu $E$ führen, nicht oder nur unvollständig bekannt sind. Es scheint, dass die Begriffe des Determinismus und des Zufalls unabhängig voneinander erklärt werden müssen. Weiter folgt, dass aus der Annahme, dass jedes Ereignis eine Ursache hat, noch nicht die Jamessche Version des Determinismus folgt. Damit diese Version folgt, muß zusätzlich postuliert werden, dass die Wirkung der Ursachen eindeutig ist. Denn die Existenz einer Ursache bedeutet noch nicht, dass der Effekt der Ursache damit eindeutig festliegt (z.B. können andere Ereignisse, die in hinreichender zeitlicher Nachbarschaft liegen, ja einen modifizierenden Einfluß haben).

Diese Überlegungen führen zu der Forderung, dass die oft mit der Vorstellung des Determinismus verbundene Vorstellung der Vorhersagbarkeit nicht in der Definition des Determinismus eingehen sollte. Diese Kombination von Determinismus und Vorhersagbarkeit tritt in der vermutlich ersten schärferen, von Pierre-Simon Laplace[20] formulierten Definition des Determinismusbegriffs auf.

**Der Laplacesche Dämon** Die Auffassung, dass die Welt determiniert ist, kann sich ergeben, wenn man sich – wie Laplace – hinreichend lange mit der Himmelsmechanik beschäftigt. Hier werden die Bewegungen der Himmelskörper durch deterministische Differentialgleichungen beschrieben, und diese Art von Gleichungen scheint dann ein mathematisches Modell für die gesamte Welt zu werden. Auf Laplace geht der später nach ihm benannte Dämon, eben der *Laplacesche Dämon*, zurück: im Vorwort zu seinem *Essai philosophique sur les probabilités* spricht Laplace von "einer Intelligenz" (une intelligence), die imstande ist, *alle* – stillschweigend als deterministisch vorausgesetzten – Differentialgleichungen zu integrieren:

> "Wir können den jetzigen Zustand des Universums als die Wirkung der Vergangenheit und die Ursache seiner Zukunft sehen. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, durch welche die Natur belebt wird, und die entsprechende Lage aller Teile, aus denen sie zusammengesetzt, und die darüber hinaus breit genug wäre, um alle diese Daten einer Analyse zu unterziehen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Körper des Universums und die des kleinsten Atoms umfassen. Für sie wäre nichts ungewiss, und die Zukunft ebenso wie die Vergangenheit wäre ihren Augen gegenwärtig." (zitiert nach Barrow (1996)

Wie Barrow (1996) anmerkt, ist die hier charakterisierte Idee schon bei Leibniz[21] zu finden:

> "Nun hat jede Ursache eine bestimmte Wirkung, die durch jene erzeugt sein könnte ... Wenn zum Beispiel eine Kugel im freien Raum eine andere trifft und wenn ihre Größe und Wege und Richtungen vor dem Stoß bekannt waren, können wir vorhersagen und berechnen, wie sie abgestoßen werden und welche Bahn sie nach dem Zusammenstoß nehmen werden ... Daher sieht man, wenn alles in der weiten Welt

[20] Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827); Mathematiker, der auf vielen Gebieten gearbeitet hat. 1814 publizierte er den *Essai philosophique sur les probabilités*, in dem auch der Determinismus diskutiert wird.

[21] Leider gibt Barrow nicht an, in welcher Schrift Leibniz' dieses Zitat zu finden ist.

> mathematisch – also unfehlbar – abläuft, jemand, der genügend Einsicht in das Innere der Dinge hätte und außerdem genug Gedächtnis und Verstand, alle Umstände in Betracht zu ziehen, ein Prophet wäre und die Zukunft wie in einem Spiegel der Gegenwart sehen könnte."

Die Laplacesche Version ist sehr häufig Ausgangspunkte für Betrachtungen zum Determinismus. Die Frage ist dabei, welche physikalischen Bedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, dass Determinismus angenommen werden kann. Generell kann man sagen, dass der Laplace-Determinismus sich an der *Klassischen Partikel Mechanik* (KPM) orientiert (Uhren, Kanonenkugeln, das Sonnensystem sind Beispiele; Bishop (2005)). Diese Mechanik wird durch *Bewegungsgleichungen* repräsentiert, die die Veränderungen der Variablen, die die Partikel beschreiben, festlegen. Dazu müssen Anfangsbedingungen und Randbedingungen (IC für *initial conditions* und BC für *boundary conditions*, Bishop (2005)) spezifiziert werden. Das System ist dann insgesamt zu jedem Zeitpunkt $t$ beschrieben. Für das System wird ein Zustandsraum definiert (vergl. Definition 1.1, Seite 16). Es wird angenommen, dass durch Spezifikation von Ort und Impuls[22] jeden Köpers alle Bewegungen festgelegt sind. Die Bewegungsgleichungen legen den Weg jeden Teilchens durch diesen Phasenraum fest. Stone (1998) hat argumentiert, dass die folgenden drei Eigenschaften die Laplacesche Version des Determinismus charakterisieren:

(DD) *Differential Dynamics:* darunter wird ein Algorithmus[23] verstanden, durch den ein Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t$ auf einen anderen Zustand des Systems zu einem anderen Zeitpunt $t'$ bezogen werden kann; dieser Algorithmus soll nicht probabilistisch sein.

(UE) *Unique Evolution:* die Entwicklung der Zustände ist eindeutig, wenn ein gegebener Zustand stets (i) dieselbe *Folge* von Zuständen vorangegangen ist und wenn (ii) dieselbe *Folge* von Zuständen folgt.

(VD) *Value Determinateness:* jeder Zustand kann bis auf einen beliebig kleinen Fehler beschrieben werden.

Das Postulat der Differentiellen Dynamik (DD) wird durch die Gleichungen der klassischen Physik motiviert, die ebenso wie die IC- und BC-Bedingungen nicht probabilistisch sein sollen. Diese Gleichungen beschreiben die Pfade im Phasenraum. Das Postulat der Unique Dynamics (UE)

[22]Der Impuls eines Körpers ist durch $p(t) = mv(t)$ definiert, wobei $m$ die Masse und $v(t)$ die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit $t$ sind.

[23]Ein Algorithmus ist ein System von Regeln oder Operationen, die, auf Zustände angewandt, zu neuen Zuständen führen. Differentialgleichungen, Differenzengleichungen, Integralgleichungen sind Beispiele für die hier gemeinten Algorithmen. Ein Algorithmus ist probabilistisch, wenn die einzelnen Operationen jeweils nur mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten gewählt werden oder wenn die Resultate der Anwendung einer Operation nur nach Wahrscheinlichkeiten erfolgen.

reflektiert die Annahme des Laplaceschen Determinismus, derzufolge ein System, das durch dieselben Anfangs- und Randbedingungen spezifiziert wird, stets exakt den gleichen Verlauf durch den Phasenraum nimmt. Es werde nun angenommen, dass das System sich nicht so verhält. Bei identischen Start- und Randbedingungen würde dann das System einmal diesen, einmal jenen Pfad nehmen, – es wäre gerade *nicht* determiniert. Die Forderung UE stellt also eine Kernforderung dar, soll ein System determiniert sein. Ein einfaches Beispiel ist das Pendel ohne Reibung: wird eine Anfangsgeschwindigkeit und eine Anfangsposition vorgegeben, so liegt die Pendelbewegung eindeutig fest, unabhängig von vorangegangenen Bewegungen. Das dritte Postulat, Value Determinateness (VD) reflektiert die Laplacesche Annahme, dass mathematische Beschreibungen mit beliebiger Genauigkeit gemacht werden können. Dass diese Annahme nicht trivial ist, wurde erst durch die Ergebnisse der Quantenmechanik deutlich. Bishop (2005) zeigt, dass die drei Charakteristika (DD), (UE) und (VD) zusammen notwendig und hinreichend sind, um von Determinismus im Sinne von Laplace reden zu können.

Earman (1986) führt aus, dass beim Laplaceschen Argument das Problem bei der "Intelligenz" – dem "Dämon" – liegt, die die jeweils z ukünftige Entwicklung vorhersagt. Die Frage sei, wie diese Intelligenz realisiert sei. Nimmt man den besten Computer, so ergibt sich das Problem, dass nicht alle Ereignisse der Zukunft vorausberechnet werden können; – diese Umöglichkeit resultiert nicht aus beschränkter Technik, sondern ist ein grundlegendes Faktum (vergl. Abschnitt **??**).

Eine Variante des Laplaceschen Dämons ist

**Poppers Dämon** Popper (1982)[24] führte den Begriff des *scientific determinism* ein:

> " ... the doctrine that the state of any closed physical system at any given future instant of time can be predicted, even from within the system, with any specified degree of precision, by deducing the prediction from theories, in conjunction with initial conditions whose required degree of precision can always be calculated (in accordance with the principle of accountablility) if the prediction task is given. ... The demon, like a human scientist, must *not* be assumed to *ascertain initial conditions with absolute mathematical precision*; like a human scientist, he will have to be content with a finite degree of precision. " (zitiert nach Earman (1986), p. 8)

Wie Earman (1986) ausführt will Popper mit dieser Charakterisierung des Determinismus zeigen, dass auch klassische Systeme (im Unterschied zu quantenmechanischen) nicht deterministisch sein können: "to make room

[24]Popper, K. R.: The open universe. London 1988

within physical theory ... for indeterminism". Denn der Poppersche Dämon agiert ja wie ein menschlicher Wissenschaftler. Der kann die Anfangsbedingungen eben auch nur mit endlicher Präzision angeben, und sollte das System eine starke Form der Instabilität zeigen, kann dieser Mangel an Genauigkeit zu großen Abweichungen von Vorhersage einerseits und tatsächlichem Verhalten andererseits führen. Allerdings wird damit aber nicht der Determinismus widerlegt, sondern nur die Annahme, dass Determinismus und Vorhersagbarkeit unmittelbar gekoppelt sind. Poppers Charakterisierung seines Dämons geht, so Earman, auf Hadamard (1952) zurück. Der hatte gefunden, dass, wenn der zukünftige Zustand nicht *stetig*[25] auf den Anfangszustand zurückzuführen ist, *alles* passieren kann:

> Everything takes place, physically speaking, as if the knowledge of ... [the initial] data would *not* determine the unknown function."
> (Hadamard (1952); p. 38, zitiert nach Earman (1986), p. 9)

Popper habe nur das entscheidende *as if* fortgelassen. Das Problem mit dem Popperschen Ansatz liegt nach Earman darin, dass er das Problem zufälligen und/oder chaotischen Verhaltens auf der Makroebene mit dem auf der Mikroebene von Gasmolekülen konfundiert. Das "zufällige" Verhalten dieser Ebene wird, wie es scheint, durch Instabilitäten erzeugt, die aber in der Popperschen Charakerisierung nicht auftauchen. Für Popper sei ein wirklich deterministisches Universum ein Albtraum (a nightmare), da dieses impliziere, dass all unser Verhalten dann festgelegt sei: die gesamte Welt wäre ein riesiger Automat. Earman argumentiert nun, dass, wenn die Welt tatsächlich ein derartiger Automat wäre, die Einführung des Popperschen Dämons als Folge von möglichen Instabilitäten hier auch nicht helfen würde. Earman führt einen weiteren Punkt ein, der Popper motiviert haben könnte, seinen wissenschaftlichen Dämon einzuführen, nämlich Poppers Ansatz, die Demarkation von Wissenschaft und Nichtwissenschaft über die Falsifikation zu definieren. Denn um den Determinismus falsifizieren zu können muß der Determinismus als Behauptung über *endliche* Vorhersagen konzipiert werden. Andere mögliche Konzeptionen des Determinismus bleiben davon allerdings unberührt. Diese tauchen in anderen wissenschaftlichen Zusammenhängen durchaus auf, – es nütze nichts, so Earman, sie einfach wegdefinieren zu wollen. Der Determinismus ist ein weiteres Beispiel dafür, dass Wissenschaftlichkeit nicht allein durch Falsifizierbarkeit definiert werden kann.

**Russells Betrachtungen** Bertrand Russel hat in seiner berühmten Arbeit *On the notion of cause* (1912) (in Russell (1963), p. 190) eine Definition des Determinismus gegeben, die auch für die heutige Philosophie des Geistes von Interesse ist. Russell nennt ein System deterministisch, wenn,

[25] Im Sinne der Anlysis!

> "given certain data $e_1, e_2, \dots, e_n$ at times $t_1, t_2, \dots, t_n$ respectively, concerning this system, if $E_t$ is the state of the system at any time $t$, there is a functional relation of the form
>
> $$E_t = f(e_1, t_1, e_2, t_2, \dots, e_n, t_n, t).$$
>
> The system will be 'deterministic throughout a given period' if $t$, in the above formula, may be any time within that period, though outside that period the formula may be no longer true. If the universe, as a whole, is such a system, determinism is true of the universe; if not, not. A system which is part of a deterministic system I shall call 'determined'; one which is not part of any such such system I shall call 'capricious'.
>
> The events $e_1, e_2, \dots, e_n$ I shall call 'determinants' of the system. It is to be observed that a system which has one set of determinants will in general have many. In the case of the motions of the planets, for example, the configuration of the solar system at any two given times will be determinants."

Es sei zunächst angemerkt, dass Russell ein System, das nicht determiniert ist, 'capricious' nennt, – also nicht 'zufällig'. Ein kapriziöses System ist einfach nicht so recht vorhersagbar, allerdings legt sich Russell nicht weiter durch eine nähere Bestimmung von 'capricious' fest.

Eine für den Determinismus unangenehme Frage ergibt sich bei näherer Betrachtung der Funktion $E_t$. Wird, so führt Russell aus, ein beliebiger Grad von Komplexität für $E_t$ zugelassen, so folgt, dass jedes System, dessen Zustand in einem gegebenen Zeitpunkt eine Funktion von meßbaren Größen ist, deterministisch ist. Man betrachte ein einzelnes Partikel, dessen Koordinaten zur Zeit $t$ durch $x_t$, $y_t$ und $z_t$ gegeben sind. Wie auch immer sich das Partikel bewegt, es muß dann Funktionen $f_1$,$f_2$ und $f_3$ geben derart, dass

$$x_t = f_1(z),\ y_t = f_2(t),\ z_t = f_3(t).$$

Dann folge, dass – theoretisch, wie Russell hervorhebt – der Gesamtzustand des Universums zur Zeit $t$ als Funktion von $t$ repräsentierbar sein muß. Das Universum ist dann deterministisch im oben definierten Sinne. Nur liefere dann die Aussage, dass das Universum deterministisch sei, keinerlei Information mehr. Es kommt dabei nicht darauf an, dass $E_t$ so kompliziert sein kann, dass diese Funktion nie hingeschrieben oder verstanden werden kann, wesentlich ist, dass das Universum deterministisch sein muß und damit Gesetzmäßigkeiten unterliegt.

Nur sei damit nichts gewonnen. Denn für ein gegebenes Gesetz, etwa Newtons Gravitationsgesetz

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$F$ die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern mit den Massen $m_1$ bzw. $m_2$, $G$ die Gravitationskonstante, und der Distanz $r$ zwischen ihnen, existiere eine unendliche Anzahl anderer Formeln, die zunächst von der newtonschen empirisch nicht unterschieden werden können weil sie die gleichen Voraussagen über $F$ machen, die aber in der Zukunft mehr und mehr von den Voraussagen der newtonschen Formel abweichen. In der Zukunft muß das "inverse square law" ($F$ ist umgekehrt proportional zu $r^2$) nicht mehr gelten, denn es gibt keinen Grund für die Annahme, dass es in der Zukunft gelten *muß*. Zur Illustration muß man nur die Möglichkeit betrachten, dass die Konstante $G$ gar keine Konstante, sondern eine bisher nur relativ langsam (in Bezug auf die Bewegung der Körper) variierende Größe ist. Auch die Massen könnten sich verändern, so dass sich am Ende eine ganz andere Formel als die newtonsche ergibt. Wenn es Gesetze gibt, die in der Zukunft nicht mehr gelten, so gibt es auch Gesetze, die bisher galten, die aber gerade jetzt gebrochen werden. Wissenschaft, so Russell, beschränke sich aber, indem die jeweils einfachsten Gesetze formuliert werden, die den gegebenen Daten entsprechen. Dieses Vorgehen wiederum entspricht keinem Naturgesetz, sondern einem methodischen Konzept. Die Tatsache, dass in den meisten Wissenschaften relativ einfache Gesetze gefunden wurden, kann nicht aus irgendwelchen *a priori* Gründen abgeleitet werden, und man kann daraus nicht induktiv folgern, dass diese Gesetze in der Zukunft gelten, nur weil sie bisher gegolten haben. Man könnte nun ein Metagesetz postulieren, nach dem sich die bisher geltenden Gesetze ändern, – nur, wie will man dieses formulieren? Offenbar ist der Begriff des Determinismus außerordentlich schwer zu fassen.

Russell kommt im Zusammenhang mit dem Determinismus auf die Frage des psychophysischen Parallelismus. Nach dieser Hypothese entspricht jedem Hirnzustand ein Bewußtseinszustand, und umgekehrt. Da die Beziehung zwischen Hirnzustand und Bewußtseinszustand eineindeutig[26] ist, kann einerseits der Bewußtseinszustand als Funktion des Hirnzustands aufgefaßt werden, aber der Hirnzustand kann ebenso als Funktion des Bewußtseinszustands betrachtet werden. Diese Konsequenz der These der eindeutigen Zuordenbarkeit von Hirn- und Bewußtseinszustand werde wohl übersehen, wenn gesagt wird, dass das Bewußtsein durch die Hirntätigkeit bestimmt sei. Russell weist nun darauf hin, dass die These impliziere, dass jeder Hirnzustand zu einem Zustand des gesamten Universums korrespondiert. Daraus ergäbe sich, dass es eine eineindeutige Beziehung zwischen dem Hirnzustand und dem Zustand des Universums geben müsse. Daraus wiederum folge, dass, wenn $n$ Zustände des materiellen Universums Determinanten des materiellen Universums sind, dann auch $n$ Bewußtseinszustände eines beliebigen Menschen Determinanten des gesamten materiel-

[26] ein Hirnzustand bestimmt eindeutig einen Bewußtseinszustand, und ein Bewußtseinszustand bestimmt eindeutig den korrespondierenden Hirnzustand.

len und mentalen Universums seien.

All dies sind Folgerungen aus der Annahme, dass der psychophysische Parallelismus wahr sei. Der wesentliche Punkt ist, dass nicht nur das Bewußtsein durch materielle Prozesse festgelegt wird, sondern umgekehrt die materiellen Prozesse auch als durch die Prozesse des Bewußtseins festgelegt betrachtet werden können. Nimmt man nun einerseits die materiellen Prozesse als deterministisch an, und andererseits als ebensogut durch Bewußtseinsprozesse bestimmt, so hat man ein Wirken durch "geistige" Gesetzmäßigkeiten zu akzeptieren. Wem das zu abstrus erscheint, muß entweder die Hypothese des psychophysischen Materialismus fallen lassen, und/oder die des Determinismus.

Russell selbst führt aus, dass die Forderung, den Zustand des Universums durch eine Funktion auszudrücken um es als deterministisch charakterisieren zu können, letztlich die Frage nach dem Determinismus trivialisiert, weil eine solche Funktion keinen benennbaren Einschränkungen genügt. Das Problem, den Begriff des Determinismus zu definieren läge in der Notwendigkeit, eine Formulierung gewisser Restriktionen zu finden. Earman (1986) schlägt vor, diese Einschränkungen über den Begriff der möglichen Welten festzulegen.

welche? In Bezug auf was?

**Mögliche Welten:** Im Folgenden sei eine *Welt* eine 4-dimensionale Raum-Zeit-Welt. Die tatsächliche Welt sei eine Sammlung aller Ereignisse, die jemals passiert sind, die jetzt passieren, oder die jemals eintreten werden. Eine mögliche Welt ist eine Sammlung möglicher Historien alternativ zur aktuellen Welt. In einem ersten Anlauf kann nun angenommen werden, dass die Ereignisse im Rahmen des klassischen Bildes gesehen werden können, d.h. dass die Strukturen der Raum-Zeit-Relationen mit den Strukturen der klassischen Physik übereinstimmen; die Relationen und die Ereignisse selbst können als Änderungen raum-zeitlicher Größen analysiert werden. Dann läßt sich eine an der Laplaceschen Auffassung orientierte Definition des Determinismus formulieren:

**Definition 2.1** *Es sei $\mathcal{W}$ die Menge aller möglichen Welten, d.h aller Welten, in denen die Naturgesetze gelten, die auch in der aktuellen Welt gelten. Irgendzwei Welten $W$ und $W'$ aus $\mathcal{W}$ mögen für irgend eine Zeit übereinstimmen. Stimmen sie dann auch für alle Zeiten überein, so heißen sie* Laplace-deterministisch. *Insbesondere heißt $W$* zukunftsmäßig Laplace-deterministisch *(analog:* historisch Laplace-deterministisch*), wenn für irgendeine Welt $W' \in \mathcal{W}$, $W$ und $W'$ zu irgendeiner Zeit übereinstimmen, sie dann auch für alle späteren (bzw. früheren) Zeiten übereinstimmen.*

Darüber hinaus kann eine Welt partialdeterministisch sein. Weiter kann eine Welt *bedingt deterministisch* sein: dann nämlich, wenn zwei Welten für alle Zeiten in den Werten der konditionierenden Größen übereinstimmen, und wenn sie zu irgendeinem Zeitpunkt in den Werten der anderen Größen übereinstimmen, so stimmen sie in allen Zeitpunkten überein. Weiter lassen sich *nicht-Laplacesche Varianten* definieren: $W \in \mathcal{W}$ heiße $(R_1, R_2)$-deterministisch, wenn für irgendein $W' \in \mathcal{W}$ gilt, dass $W$ und $W'$ in $R_1$ übereinstimmen, sie dann auch in $R_2$ übereinstimmen, wobei $R_1$ und $R_2$ bestimmte Raum-Zeit-Regionen sind. Ein $(R_1, R_2)$-Determinismus ist dann insbesondere ein Laplacescher Determinismus, wenn $R_1$ eine Zeitscheibe und $R_2$ die Zukunft dieser Scheibe ist.

Anhand dieser Definitionen lassen sich eine Reihe von Ansätzen untersuchen. Man kann fragen, ob der Leibnizsche Satz vom Zureichenden Grund bereits einen Determinismus impliziert. Es zeigt sich dann, dass die Antwort auf diese Frage von weiteren Annahmen über die Raum-Zeit-Struktur abhängt. So nahm Leibniz an, dass es (i) eine absolute Gleichzeitigkeit gibt, dass (ii) der Raum euklidisch ($\mathbb{E}^3$) ist, und dass es (iii) eine wohldefinierte Dauer für nicht-simultane Ereignisse gibt. Es läßt sich nun zeigen, dass diese Festlegungen den Laplaceschen Determinismus ausschließen (Earman (1986), p. 26). Das Argument soll hier nicht im Detail entwickelt werden, weil es sich auf bestimmte mathematische Argumente stützt, die hier erst entwickelt werden müßten. Der Kernpunkt des Arguments ist, dass die Leibnizsche Theorie des Raumes bzw. der Bewegung rein relational ist: alle Bewegungen von Körpern sind Bewegungen relativ zueinander. Im Unterschied dazu führte Newton noch den Begriff des Inertialsystems[27] und den des absoluten Raumes ein, in Bezug auf den Bewegung definiert werden kann. In einem solchen System läßt sich ein Laplacescher Determinismus erklären. Das Beispiel zeigt, dass ein Laplace-Determinismus nicht einfach durch Ursache-Wirkungsketten erklärt werden kann, sondern dass physikalische Randbedingungen erfüllt sein müssen.

Die Bewegung von Partikeln kann durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Viele Prozesse in der Physik erfordern aber zu ihrer Beschreibung die Einführung partieller Differentialgleichungen. Eine der einfachsten Gleichungen dieser Art ist die Wärmegleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

$u$ ist ein Maß für die Wärme am Ort $x$ zur Zeit $t$, $\alpha$ ein Faktor, der die Wärmeleitfähigkeit angibt. Die Veränderung der Wärme am Ort $x$ zur Zeit $t$ ist dieser Gleichung nach proportional zur Veränderung der Veränderung der Wärme zur Zeit $t$ am Ort $x$. Damit auch hier ein Determinismus erklärt

[27] Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem eines sich gleichförmig, d.h. nicht beschleunigten, und geradlinig bewegenden Beobachters. Sitzt man in einem mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus fahrenden Zug, so ist der Zug ein solches Inertialsystem. In einem Inertialsystem gilt das newtonsche Trägheitsgesetz: so lange keine Kräfte auf ein Objekt einwirken, bewegt es sich gleichförmig und geradlinig.

werden kann, muß eine Reihe von Randbedingungen erfüllt sein, die sich auf die Eindeutigkeit der Lösung für die Gleichung beziehen. Physikalisch findet man nun, dass solche Eindeutigkeiten nicht notwendig existieren; dies gilt auch für gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Frage nach dem Determinismus hängt nun wesentlich von den spezifischen Annahmen ab, die gemacht werden können. Dabei ist wichtig, dass es sich nicht um epistemische, sondern stets um ontologische Aspekte handelt, d.h. die Diskussion des Determinismus wird nicht geführt in Bezug auf das, was man wissen kann, sondern in Bezug auf das, was physikalisch sinnvoll ist.

Earman hat mit im wesentlichen den gleichen Resultaten auch nichtklassische Theorien der Physik untersucht. Es gibt allerdings noch weitere, sich weniger explizit auf physikalische Theorien beziehende Argumente zum Laplaceschen Determinismus. So kann argumentiert werden, dass der Determinismus im Sinne des Laplace'schen Dämons zu einem Paradoxon führt. Denn die Dinge in dieser Welt geschehen dann so, wie sie geschehen, weil sie eben geschehen, denn sie können nur so geschehen, weil sie ja determiniert sind. Genau das sagt aber auch die radikale Alternative zu dieser Theorie aus, der Indeterminismus. Dieser Theorie zufolge geschehen die Dinge zufällig, – und daran kann man nichts machen, die Dinge geschehen so, wie sie eben geschehen. Also kann man eine deterministische Welt nicht von einer indeterministischen Welt unterscheiden; insbesondere sind beide Theorien in ihrer Allgemeinheit nicht falsifizierbar. van Kampen (1991) hat den Sachverhalt als Theorem formuliert:

> **van Kampens Theorem:** Der ontologische Determinismus à la Laplace kann anhand von empirischen Beobachtungen weder bewiesen noch widerlegt werden. (van Kampen, 1991)
>
> **Beweis:** Angenommen, man lebt in einer freien Welt $A$, in der man imstande ist, aus Beobachtungen zu folgern, dass die Ereignisse in $A$ nicht determiniert sind. Es kann sein, dass sie gelegentlichen Zufallssprüngen (random jumps) unterworfen sind, oder dass man fähig ist, zu beweisen, dass man einen freien Willen hat; jedenfalls kann keine eindeutige Verbindung für aufeinanderfolgende Zustände in $A$ gefunden werden. Nun stelle man sich eine zweite Welt $B$ vor, in der alle Ereignisse vollständig determiniert sind, wobei die folgende Regel gelte: alle Ereignisfolgen sind eine exakte Kopie der Ereignisfolgen in $A$, die vor einer Million Jahren abliefen. Jeder in $B$ hat exakt die gleichen Erfahrungen wie sein Prototyp in $A$. Also hat jeder in $B$ das gleiche Recht wie sein Prototyp in $A$, zu folgern, dass seine Welt *nicht* deterministisch sei. Trotzdem ist seine Schlußfolgerung falsch. Daraus folgt, dass die Schlußfolgerung des Prototyps in $A$, dass es keinen Determinismus gäbe, ebenfalls falsch war. Denn es ist

möglich, dass jeder Prototyp in $A$ ebenfalls ein Replikat eines Prototyps aus einer noch früheren Welt ist, etc.

Andererseits kann der ontologische Determinismus ebenfalls nicht bewiesen werden, denn wir leben in einem einzelnen Universum mit einer einzigen Folge sukzessiver Zustände[28]. Es ist also nicht möglich, zu sagen, dass ein Zustand den anderen determiniert, ebensowenig, wie man sagen kann, dass in einer Folge von Primzahlen die eine Primzahl die andere determiniert. Das mögliche Gegenargument, dass vielleicht der Laplacesche Dämon imstande ist, die ganze Zukunft zu sehen, ist irrelevant, denn wir können nicht mit dem Dämon kommunizieren. Denn könnten wir mit ihm kommunizieren oder könnte er seine Existenz uns in irgendeiner Weise mitteilen, so würde er damit die Welt beeinflussen und würde damit dem Prinzip des Determinismus widersprechen. Damit – so van Kampen – ist das Theorem bewiesen.

□

### 2.4.1 Vorhersagbarkeit und Zufall

*Ich würde nicht sagen, dass die Zukunft weniger vorhersagbar ist als die Vergangenheit. Die Vergangenheit war nicht vorhersagbar, als sie begann.*

*Donald Rumsfeld*

Earman (1986) hat bereits darauf hingewiesen, dass Determinismus nicht schon Vorhersagbarkeit bedeutet. Am Beispiel der Leibnizschen Kugeln im freien Raum hat Penrose (1989)[29] illustriert, dass Kausalität nicht Determiniertheit im Sinne von Vorhersagbarkeit bedeutet. Man stellt sich gewöhnlich vor, dass eine hinreichend große Genauigkeit des Anstoßes einer Kugel impliziert, dass sich der Lauf der Kugel vorausberechnen läßt. Aber dies ist nicht so. Barrow (1996) zeigt an einem relativ einfachen Beispiel, dass minimale Abweichungen von der "korrekten" Position (korrekt relativ zu einem gewünschten und in diesem Sinne vorherzusagenden Lauf der Kugel) einerseits unvermeidbar sind, und andererseits riesige Abweichungen vom geplanten Verlauf bedeuten können. Es sei $\mathbf{v}_0$ ein Radiusvektor, dessen Länge gleich dem Radius des Kreises ist und der die gleiche Orientierung wie die $y$-Achse hat (er steht exakt senkrecht). Auf dem Kreis werde ein zweiter Punkt $P_1$ betrachtet, zu dem ein zweiter Radiusvektor

[28] Van Kampen geht nicht auf die Everettsche Theorie paralleler Universen ein; es wäre zu prüfen, ob sich die van Kampensche Argumentation auf diese Theorie übertragen läßt.

[29] The Emperor's new Mind

$\mathbf{v}_1$ zeige; $\mathbf{v}_1$ bilde mit $\mathbf{v}_0$ einen Winkel $\alpha$. Der Vektor $\mathbf{v}_1$ werde nun um den Winkel $\alpha$ rotiert, d.h. in einen Vektor $\mathbf{v}_2$ überführt, der mit $\mathbf{v}_0$ den Winkel $2\alpha$ bildet. $\mathbf{v}_2$ zeigt auf den Punkt $P_2$. $\mathbf{v}_2$ werde wiederum so in einen Vektor $\mathbf{v}_3$ überführt, dass $\mathbf{v}_3$ mit $\mathbf{v}_0$ den Winkel $2 \times 2 \times \alpha = 2^2\alpha$ bildet und auf den Punkt $P_3$ zeigt, $\mathbf{v}_3$ werde in $\mathbf{v}_4$ mit dem Winkel $2^3\alpha$ zu $\mathbf{v}_0$ überführt, etc. Die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ etc werden nach dieser Regel exakt definiert. Nun kann aber der Ausgangspunkt $P_1$ immer nur bis auf eine bestimmte Ungenauigkeit bestimmt werden. Man kann den Winkel $\alpha$ nur bis zu einem gewissen Grad genau bestimmen, also etwa $30^0 \pm \varepsilon$, etwa mit $\varepsilon = 1/100$. Nach $n$ Rotationen erhält man eine Position $P_n^*$, die durch $2^n(\alpha \pm \varepsilon)$ gegeben ist, die von der "wahren" Position $P_n$ um den Faktor $\pm 2^n\varepsilon$ abweicht. Nach $n = 5$ Rotationen beträgt die Abweichung $.32^0$, bei $n = 10$ bereits $10.24^0$, und nach $n = 15$ ist die Abweichung schon $327.68^0$. Nach $n = 16$ Rotationen um den Winkel $\alpha \pm \varepsilon$ beträgt die Abweichung bereits mehr als $360^0$ und über die entsprechenden Punkte auf dem Kreis kann nichts mehr ausgesagt werden; alle Punkte auf dem Kreis werden unabhängig von der Ausgangslage gleich wahrscheinlich! Selbst wenn $\varepsilon$ auf die Größe eines Atoms reduziert wird, ist die Ungenauigkeit der Position des entsprechenden Punktes bei bereits 38 Rotationen auf mehr als $360^0$ angewachsen! Man kann mit Barrow sagen, dass die Unvorhersagbarkeit uns immer einholt.

Der Laplacesche Dämon wird also schon am Problem der Berechenbarkeit scheitern. Kleine Ursachen haben nicht notwendig dazu korrespondierende kleine Wirkungen. Maxwell stellte fest, dass die Lehre, derzufolge gleiche Vorbedingungen gleiche Folgen haben, eine Lehre der Metaphysik sei. Damit hat er recht, aber Lehren der Metaphysik müssen nicht falsch sein. Andererseits ist es eben so, dass *exakt* gleiche Vorbedingungen extrem selten, wenn überhaupt jemals, vorkommen. Wie das Beispiel des rotierenden Vektors gezeigt hat, können schon kleinste Unterschiede ($\pm\ \varepsilon$) zu äußerst unterschiedlichen Folgen führen. Bei Billiardkugeln implizieren bereits infinitesimale Unterschiede zwischen den Startbedingungen nach nur 15 Begegnungen mit anderen Kugeln eine vollständige Unvorhersagbarkeit im Rahmen der klassischen newtonschen Physik.

Auch in zufälligem Geschehen finden sich Gesetzmäßigkeiten. Eine der kompaktesten Definitionen des Begriffs des Zufalls wurde dementsprechend von dem amerikanischen Schriftsteller Ambrose Bierce[30] boshaft als Oxymoron formuliert[31]: *Accident – an inevitable occurrence due to the action of immutable natural laws* (Bierce, 1911/2003). Diese Definition ist der Hintergrund für die folgende Elaboration.

Ein Ereignis heißt zufällig, wenn sein Eintreten nicht anhand gegebener

[30](1842 - 1914)
[31]Accident steht nicht nur für Unfall, sondern auch für Zufall.

Daten oder Bedingungen deterministisch vorhergesagt werden kann. Nach den vorangegangenen Betrachtungen ist Zufälligkeit nicht notwendig eine Implikation fehlender Kausalität. Zufälligkeit ist möglicherweise nur das Resultat einer unbekannten oder nicht berechenbaren Kausalkette. Dieser Sachverhalt führt zur Interpretation der Wahrscheinlichkeit als eines epistemologischen Begriffs (vergl. Wissenschaftstheorie III, Abschnitt 2.2).

Umgekehrt wird der Begriff des Determinismus gelegentlich mit dem der Vorhersagbarkeit gleichgesetzt. In der Wissenschaft wird man im allgemeinen mit unvollständigen und ungenauen Daten konfrontiert. Selbst wenn alle Prozesse, etwa in der Biologie, vollständig determiniert wären, gäbe es kaum eine Möglichkeit, diese Determiniertheit *in jedem Schritt* nachzuvollzienen; wie die obigen Betrachtungen zeigen, wird man notwendig auf Wahrscheinlichkeitsaussagen und damit auf statistische Aussagen geführt. Für die Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie ist aber die Frage, ob es Ereignisse ohne Kausalität gibt, wiederum nicht wichtig. Die Diskussion des Begriffs der Kausalkette zeigt, dass die Existenz einer Kausalkette noch nicht impliziert, dass die Ereignisse in der Kette auch determiniert sind: selbst wenn der Laplacesche Dämon alle Schritte berechnen könnte, könnte er sie uns, wie van Kampen argumentiert hat, nicht mitteilen. Dementsprechend werden Wahrscheinlichkeiten als Maße auf bestimmten Mengen jeweils möglicher Ereignisse eingeführt, und für diese Art der Definition von Wahrscheinlichkeit wird die Existenz akausaler Ereignisse nicht benötigt. Man gerät als Wahrschenlichkeitstheoretiker also nicht in Widerspruch zur Kantschen Auffassung, derzufolge die Annahme einer kausalen Struktur von Ereignisfolgen denknotwendig sei. Die von Sagan (1997, p. 213) im Zusammenhang mit kosmologischen Theorien formulierte Einsicht "absence of evidence is not evidence of absence" gilt auch im hier gegebenen Zusammenhang: die mangelnde Aufindbarkeit verursachender Ereignisse muß noch nicht bedeuten, dass sie nicht existieren.

van Kampen (1991) verweist noch einmal auf die Situation in der Statistischen Physik. Seit Boltzmann wird ein Gas als eine Menge von Molekülen betrachtet. Deren Bewegung kann durch deterministische Gleichungen beschrieben werden, – im Prinzip. Die Beobachtungen des Gases finden aber auf einem gröberen Niveau statt, und die Differentialgleichungen auf diesem Niveau beziehen sich auf Variablen wie Masse, durchschnittliche Geschwindigkeit der Moleküle, Gesamtenergie und sind wiederum deterministisch. Bei diesen Gleichungen handelt es sich aber, im Gegensatz zu denen auf dem mikroskopischen Niveau, um Approximationen, denn die tatsächlichen Werte der makroskopischen Variablen schwanken zufällig um einen Mittelwert. Die Schwankungen heißen auch *Fluktuationen*. Die Werte der zufälligen Abweichungen können nur berechnet werden, wenn man die mikroskopischen Gleichungen vollständig löst, was unmöglich ist. Insofern kann man sagen, dass das System der Moleküle zwar auf dem mikroskopischen Niveau, nicht aber auf dem makroskopischen Niveau deterministisch ist; die Gleichungen des makroskopischen Niveaus beziehen sich eben nur auf Mittelwerte.

### 2.4.2 Zufällige Zeitpunkte

Im Zusammenhang mit der Frage nach dem Determinismus ergibt sich stets auch die Frage, ob Zufall nur ein epistemischer Begriff ist – Zufall meint dann einfach mangelndes Wissen über die ablaufenden Kausalketten – oder ob Zufall auch ein nicht weiter reduzierbares Phänomen sein kann, d.h. ob zufällige Ereignisse tatsächlich akausal auftreten können. Dazu werde nun eine Folge von Ereignissen betrachtet, die "rein zufällig" (im Sinne von nicht weiter reduzierbar) sei. Es muß zunächst geklärt werden, was damit gemeint sein soll.

Ein Ereignis sei zum Zeitpunkt $t = 0$ eingetreten, und man wartet bis zum Eintreten des nächsten Ereignisses, - z.B. ein Klick, den ein Geigerzähler erzeugt, wenn ein Teilchen zerfällt. Die Wartezeit bis zum nächsten Ereignis sei $\tau$; $\tau$ ist eine zufällige Veränderliche. Beim Würfel heißen die Ereignisse (Augenzahlen) zufällig, wenn alle Augenzahlen gleichwahrscheinlich sind; Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl gleich $k$ ist, $k = 1, \ldots, 6$, ist demnach $p(k) = 1/6$. Ist ein endliches Zeitinterval $[0, T]$ (also $t < \infty$) gegeben und will man ausdrücken, dass ein Ereignis "rein zufällig" (aber insgesamt mit Sicherheit) innerhalb dieses Intervalles auftritt, so wird man analog zum Würfel fordern, dass die Wahrscheinlichkeitdichte für das zufällige Ereignis durch $f(t) = 1/T$ gegeben ist. Sicher ist dann, den Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechung entsprechend, $\int_0^T f(t)dt = 1$. Oft macht es aber keinen Sinn, einen endlichen Wert von $T$ anzugeben, etwa wenn das zufällige Ereignis der Einschlag eines die Menschheit vernichtenden Meteoriten ist. Für $T = \infty$ ergäbe sich, will man den Fall "reiner Zufälligkeit" betrachten, die Dichte $f(t) = 1/\infty = 0$, und dementsprechend $\int_0^\infty f(t)dt = 0$. Die Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten macht in diesem Fall also keinen Sinn. Diese Annahme wird durch die der konstanten Hazardfunktion ersetzt, wobei die Hazardfunktion die Wahrscheinlichkeit, dass das in Frage stehende Ereignis im Intervall $(t, t + dt)$ eintritt *unter der Bedingung*, dass es nicht schon vor dem Zeitpunkt $t$ eingetreten ist, definiert. Die folgende Betrachtung zeigt, wie der Begriff der reinen Zufälligkeit, der der gleichen Wahrscheinlichkeit von Ereignissen und der der Hazardfunktion zusammenhängen.

Gegeben sei ein Intervall $[0, T]$. In diesem Intervall wird zufällig ein Punkt ausgewählt; die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Punkt im Teilintervall $(t_1, t_2)$ liegt, ist dann

$$P(\text{ein Punkt in } (t_1, t_2)) = \frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{\Delta t}{T}, \;\; \Delta t = t_2 - t_1. \tag{2.5}$$

Man kann auch sagen, dass diese Definition von $P(\text{ein Punkt in }(t_1, t_2))$ "reine Zufälligkeit" definiert. Die Wahrscheinlichkeit soll von der speziellen Wahl der Zeitpunkte $t_1$ und $t_2$ unabhängig sein und nur von ihrer Differenz $\Delta t$ abhängen; man kann dann insbesondere $t_1 = 0$ und $t_2 = t$ setzen, so dass $\Delta t = t$.

Nun werden insgesamt $n$ Punkte ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass gerade $k \leq n$ Punkte in $(t_1, t_2)$ liegen, ist dann

$$P(k \text{ Punkte in } [0,t)) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{2.6}$$

Für

$$n \to \infty, \quad T \to \infty, \quad n/T \to \lambda \tag{2.7}$$

folgt

$$P(k \text{ Punkte in } [0,t)) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \tag{2.8}$$

d.h. die Anzahl der Punkte in einem beliebigen Teilintervall $[t_1, t_2)$ ist Poisson-verteilt. Es sei $t$ die Zeit, die es dauert, bis der erste Punkt auftritt. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall $[0, t)$ *kein* Punkt gewählt wird, also $k = 0$, ist nach (2.8)

$$P(\text{kein Punkt in } [0,t)) = e^{-\lambda t}. \tag{2.9}$$

Dies ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass $\tau > t$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\tau \leq t$ ist, durch $P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ gegeben; man hat damit

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{2.10}$$

d.h. die Wartezeit ist exponentialverteilt.

Wie bereits im ersten Absatz angedeutet, wird der Begriff der reinen Zufälligkeit häufig mit der Gleichverteilung assoziiert. Die Annahme einer Gleichverteilung ist aber in vielen Fällen nicht sinnvoll. Man betrachte den Gewinn im Lotto. Die Angabe eines endlichen Intervalls – sagen wir $n$ Wochen – in dem die Zeitpunkte eines Gewinns gleichverteilt wären, würde die Annahme bedeuten, dass wir mit Wahrscheinlichkeit 1 innerhalb der $n$ Wochen die ersehnte Million Euros gewönnen, und die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn in der $k$-ten Woche gemacht würde, $1 \leq k \leq n$, wäre gleich $1/n$. Die Wahrscheinlichkeit hinge also von $n$ ab, und würde man den Fall $n = \infty$ annehmen – es gibt ja immer wieder Leute, deren Lebensjahre ohne Lottogewinn zeronnen sind – hätte man die Wahrscheinlichkeit Null für einen Gewinn in einer beliebigen Woche. Wir wissen aber, dass die Wahrscheinlichkeit zwar klein, aber eben doch größer als Null ist, und wenn man sinnvollerweise annimmt, dass die einzelnen Spiele stochastisch unabhängig voneinander sind, erhält man für die Wahrscheinlichkeit, nach der $k$-ten Woche zu gewinnen, den Ausdruck

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

wobei $p$ die Wahrscheinlichkeit ist, in einer beliebig herausgegriffenen Woche zu gewinnen, und $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$. Da die Anzahl der Tage bis zu unserem Tod endlich ist, kann es sein, dass wir über den Tod hinaus Lotto spielen müssen, bevor wir etwas gewinnen. Die Unabhängigkeit der einzelnen Spiele impliziert übrigens, dass die Wahrscheinlichkeit, in einer bestimmten, etwa der $k$-ten, Woche zu gewinnen, unter der Bedingung, dass man nicht schon vor dieser Woche gewonnen hat, für alle Wochen konstant ist:

$$P(X = k | X > k - 1) = \frac{P(\{X = k\} \cap \{X > k - 1\})}{P(X > k - 1)} = \frac{P(X = k)}{P(X > k - 1)} = p. \tag{2.12}$$

Die *geometrische Verteilung* (2.11) ist das diskrete Pendant zur Exponentialverteilung (wobei (2.11)) zur *Dichte* $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ korrespondiert). Bezeichnet man $P(\tau \leq t)$ mit $F(t)$, also $F(t) = P(\tau \leq t)$, $f(t) = dF(t)/dt$, so ist der zu (2.12) analoge Ausdruck

$$\begin{aligned} p(\tau \in (t, t + \Delta t) | \tau > t) &= \frac{p(\tau \in [t, t + \Delta t) \cap \tau > t)}{p(\tau > t)} \\ &= \frac{p(\tau \in [t, t + \Delta t))}{p(\tau > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

und da $\lim_{\Delta t \to 0}(F(t + \Delta t) - F(t))/\Delta t = f(t)$, folgt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = \phi(t)dt. \tag{2.14}$$

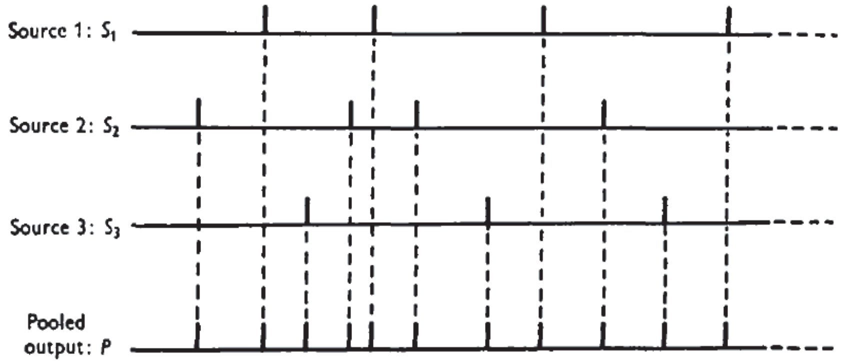
$\phi(t) = f(t)/(1 - F(t))$ heißt *Hazardfunktion*. Setzt man für $f$ die Exponentialfunktion $\lambda \exp(-\lambda t)$ und für $F$ die entsprechende Verteilungsfunktion $1 - \exp(-\lambda t)$ ein, so erhält man

$$\phi(t) = \lambda. \tag{2.15}$$

Die zur Exponentialfunktion gehörende Hazardfunktion ist also eine Konstante; die Wahrscheinlichkeit, dass $\tau$ in das Intervall $[t, t+dt)$ fällt unter der Bedingung, dass $\tau > t$ ist, ist gleich der Konstanten $\lambda > 0$, für alle $t > 0$. Reine Zufälligkeit einer Folge von Ereignissen in einem nicht begrenzten Zeitintervall drückt sich also in der Unabhängigkeit der Hazardfunktion von der Zeit, also deren Konstanz, aus.

Hat man also reine Zufällligkeit in einer Folge von Punkten, so sind die Punkte pro Intervall Poisson-verteilt, und die Zeiten zwischen den Ereignissen sind exponentialverteilt.

Abbildung 7: Überlagerte deterministische Folgen (Cox & Smith (1953))




**Beispiel: Alpha-Zerfall** Für hinreichend große Anzahl von Kernen ist die Anzahl von Zerfällen pro Zeit durch

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \tag{2.16}$$

woraus

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2.17}$$

folgt (Fließbach (1995), p. 164); zum Zeitpunkt $t$ sind von $N_0$ Teilchen noch $N(t)$ übrig. Demnach ist

$$\frac{N_0 - N(t)}{N_0} = 1 - \frac{N(t)}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} \tag{2.18}$$

der Anteil der bis zur Zeit $t$ zerfallenen Teilchen; dies ist gerade die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen bis zur Zeit $t$ zerfallen ist. Die Wartezeit bis zum Zerfall eines Teilchens ist also exponentialverteilt, und nach dem Vorangegangenen ist dieser Befund mit der Interpretation, dass der Zerfall ein rein zufälliger Prozess ist, verträglich. Ob dieser Begriff von "rein zufällig" mit dem Begriff "akausal" gleichgesetzt werden kann, ist eine andere Frage. Denn diese Gleichsetzung ist nicht logisch zwingend. Zur Begründung der Aussage, dass der Schluß nicht zwingend ist, muß nur ein Beispiel für einen Prozess angegeben werden, bei dem exponentialverteilte Wartezeiten beobachtet werden, die aber *nicht* auf Akausalität zurückzuführen sind. Cox und Smith (1953) betrachteten den Fall, dass es eine Reihe von "Quellen" oder Mechanismen gibt, die in regelmäßigen Abständen ein "Ereignis" erzeugen; die Quelle $Q_j$ erzeugt eine Folge $S_j$. Man betrachtet nun die Folge $S$ von Ereignissen, die sich aus der Überlagerung der Folgen $S_j$ ergibt (pooling of events, vergl. Abbildung 7). Man betrachtet etwa eine Menge von

Neuronen, bei der jedes Neuron in regelmäßigen Abständen "feuert", also ein Aktionspotential erzeugt. Regelmäßig soll heißen, dass das $i$-te Neuron zu den Zeiten $\Delta t_i$, $2\Delta t_i$, $3\Delta t_i$, $\dots$ feuert, wobei der Wert $\Delta t_i$ für das $i$-te Neuron charakteristisch ist. $S_i$ sei die Folge der Zeiten $\Delta t_i$, $2\Delta t_i$, $3\Delta t_i$, $\dots$. $\Delta t_i$ ist die "Periode" für das $i$-te Neuron. Die $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$ seien alle verschieden und es gelte $\sum_{i=1}^{N} n_i \Delta t_i = 0$, wobei $\Delta t_i > 0$ für alle $i$ und die $n_i$ natürliche Zahlen sind, die nicht alle gleich Null sind, und die Quotienten $\Delta t_i/\Delta t_j$, $i \neq j$, seien alle irrational[32]. Ausgehend von einem zahlentheoretischen Theorem[33] von Weyl (1916) zeigen Cox et al. dann, dass die Verteilung der Zeiten zwischen benachbarten Ereignissen der Folge $S$ gegen eine Exponentialverteilung strebt und dass benachbarte Zwischenzeiten stochastisch unabhängig sind; unter bestimmten Randbedingungen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden muß, ist dann die Folge $S$ als Poisson-Prozess zu beschreiben. Dies bedeutet, dass "reine" Zufälligkeit im eingangs erläuterten Sinne zur Gleichung (2.10) führt, dass umgekehrt von der im Prinzip beobachtbaren Tatsache, dass Zwischenzeiten exponentialverteilt sind, nicht auf die "reine" Zufälligkeit geschlossen werden kann, denn die Folgen $S_i$ und damit auch die Folge $S$ sind ja nicht zufällig, – man beachte, dass die $\Delta t_i$ nicht zufällig gewählt werden müssen, die einzige Forderung ist ja, dass $\Delta t_i/\Delta t_j$ für $i \neq j$ irrational sein muß. Betrachtet man also eine Folge von Klicks, wie sie von einem Geigerzähler aufgrund zerfallender Teilchen erzeugt werden, so findet man zwar, dass die Zwischenzeiten der Klicks der Verteilung (2.18) genügen, aber man kann nicht zwingend folgern, dass der zugrundeliegende Zerfallsprozess "rein zufällig" im Sinne von akausal ist.

In Abschnitt 3 wird der Sachverhalt, dass etwas als zufällig Erscheinendes nicht zufällig sein muß, noch einmal von einer andereren Warte aus betrachtet. Das Ziel der Betrachtungen ist nicht, nachzuweisen, dass es den "reinen Zufall" nicht gibt, sondern dass man nicht notwendig auf Akausalität schließen kann, auch wenn manche Daten dies nahelegen. Die Idee des "reinen Zufalls" kann oft auch durch die Annahme des "averaging over uncertainty" (Passon, 2004) ersetzt werden. Es ist dann praktisch unmöglich, alle Aspekte zu kennen, die einen Prozess ausmachen, aber es muß nicht Akausalität postuliert werden.

Im folgenden Abschnitt wird der Begriff des Zufalls mit der Zahlentheo-

[32]Eine reelle Zahl $x$ heißt *irrational*, wenn sie nicht in der Form $p/q$ dargestellt werden kann, wobei $p$ und $q$ natürliche Zahlen sind. Mit 'irrational' ist nicht gemeint, dass die Zahl "unvernünftig" ist, wie es der Alltgsgebrauch des Wortes irrational nahelegt. Ratio ist ein lateinischer Ausdruck für Quotient, eine irrationale Zahl ist demnach eine Zahl, die nicht als Quotient *natürlicher Zahlen* dargestellt werden kann, – wohl aber als Quotient irrationaler Zahlen.

[33]Es sei $\{\Theta\}$ der Dezimalteil von $\Theta$, also für $\Theta = \pi = 3.14159\dots$ ist $\{\Theta\} = .14159\dots$, und es sei $I_l$ irgendein Intervall der Länge $l$ in $(0,1)$, und $p_m(I_l)$ sei der Anteil von $\{\Theta\}$, $\{2\Theta\}, \dots, \{m\Theta\}$, der in das Intervall $I_l$ falle. Dann gilt $\lim_{m\to\infty} p_m(I_l) = l$.

rie bzw. dem Begriff der Berechenbarkeit in Verbindung gebracht.

### 2.4.3 Nichtkomprimierbarkeit und Algorithmische Informationstheorie

Im Jahre 1686 hatte Leibniz den Auftrag, die Konstruktion von Wasserpumpen in Silberminen zu verbessern. Wegen eines Schneesturms saß er aber in einer Hütte fest und mußte seine Arbeit unterbrechen[34]. Er nutzte die Zeit, um den *Discours de métaphysique* niederzuschreiben (Leibniz, 1686/1951); in den Abschnitten V und VI betrachtet er zufällig auf ein Blatt Papier gespritzte Tintenkleckse. Leibniz ist überzeugt, dass es stets eine mathematische Formel – d.h. eine Funktion – gibt, die es gestattet, einen Kurvenverlauf zu berechnen, der durch alle diese Punkte geht; in der Tat weiß man heute, dass ein solcher Funktionsverlauf stets durch die Lagrange-Interpolation möglich ist. Eine solche Funktion ordnet Zahlen (die etwa die Zeit repräsentieren) eindeutig bestimmte andere Zahlen zu (hier: den Koordinaten der Punkte), weshalb die Existenz einer Funktion die Determiniertheit der Punkte suggeriert. Andererseits sind die Punkte zufällig auf das Papier gebracht worden. Dies bedeutet, dass die Existenz einer solchen Funktion noch nicht gestattet, zu entscheiden, ob die Punkte (die Tintenkleckse) zufällig auf dem Papier angeordnet wurden oder nicht. Leibniz bemerkt dazu, dass eine zu komplexe ("fort composée") Formel für die Funktion *kein* wissenschaftlich valides Gesetz repräsentiere. Die Punkte seien dann zufällig ("irrégulier"). Die Idee hinter dieser Argumentation ist offenbar, dass die Formel in bestimmter Weise "einfach" sein muß, um ein Gesetz zu repräsentieren. Weyl (1932) bemerkte dazu, dass der Begriff der Komplexität einer Formel allerdings nicht hinreichend scharf definiert sei, um diese Idee zu einem tatsächlich anwendbaren Kriterium für Zufälligkeit zu machen. Chaitin (1965) lieferte dann einen neuen Ansatz. Daten (etwa die Koordinaten von Punkten auf einem Blatt Papier, seien sie nun Tintenkleckse oder Abbildungen von Meßresultaten), können stets durch Folgen von Nullen und Einsen repräsentiert werden. Ein Computerprogramm kann ebenfalls durch die Anzahl von Bits (0-1-Entscheidungen) charakterisiert werden. Ein Computerprogramm ist ein Algorithmus, nach dem bestimmte Größen berechnet werden. Die Anzahl von Bits, die das Programm charakterisieren, kann als Maß für die Komplexität des Programms gewertet werden. Ist diese Anzahl von Bits kleiner als die Anzahl von Bits, die zur Beschreibung der Daten benötigt werden, so kann man mit dem Programm die Daten "erklären", denn das Programm repräsentiert ja ein Gesetz, nach dem die Daten erzeugt worden sein können. Existiert ein solches Gesetz,

[34] vergl. Chaitin (2004)

sind die Daten nicht zufällig[35]. Existiert kein Programm, das durch eine kleinere Anzahl von Bits als die der Daten charakterisiert wird, so sind die Daten "irreduzibel", – also zufällig. Dies führt zu einer Theorie des Zufalls, die über den Komplexitätsbegriff eingeführt wird. Das *Verstehen* eines Datensatzes läßt sich dann als Kompression des Datensatzes auffassenn, - die sich als ein Gesetz darstellen läßt. Axiome sind Aussagen, die nicht weiter reduzierbar sind. Jedes Bit in einem solchen Axiom ist eine frei gewählte, unabhängige Annahme, mit einer gewissen a priori Wahrscheinlichkeit dafür, die korrekte Wahl zu sein, und die Anzahl der Axiome soll minimal sein.

Chaitin (1975) illustriert seine Idee durch die Vorstellung eines Freundes, den eine Dienstreise in eine andere Galaxie geführt hat, wo er eine Reihe von Berechnungen durchzuführen soll. Leider hat er seine Tabelle mit trigonometrischen Funktionen vergessen, und er telegraphiert, man möge sie ihm nachsenden. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, die Tabellen zu berechnen, also in einem Code darzustellen (vorzugsweise im Binärecode), und ihm das Zahlenwerk zu schicken. Nur wäre das sehr kostspielig. Einfacher wäre es, ihm die Formel zu schicken, die er nur anwenden muß, um sich jede gewünschte Zahl zu berechnen; dies wäre Eulers Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $i = \sqrt{-1}$. Diese Formel enthält die gesamte Information der trigonometrischen Tabellen. Wäre unser Freund aber nicht an der Trigonometrie, sondern nur an Fussball interessiert, und wünschte er die Resultate der Bundesligaspiele seit Beginn der Bundesliga, so gäbe es keine Möglichkeit, diese Resultate zu komprimieren, man müßte ihm die gesamte Tabelle schicken. Man betrachte die folgenden beiden Folgen:

010101010101010101010101

010011100101101011001110

Die erste Folge kann man in einem kurzen Befehl zusammenfassen: Drucke die Folge 01 12-mal! Für die zweite Folge wird man keinen so einfachen Befehl finden, sie ist deshalb komplexer. Wäre sie beliebig lang, könnte man eventuell überhaupt keinen Algorithmus finden. Sie wäre dann nicht komprimierbar, und *deshalb* zufällig.

Zufälligkeit ist, wie Chaitin (1986) schreibt, tief im Zahlensystem enthalten. So kann man Polynome der Art

$$P(x, n, y_1, \ldots, y_n) = 0 \tag{2.19}$$

betrachten, wobei die $x$, $n$ und die $y_1, \ldots, y_n$ ganze Zahlen sind. Für ein gegebenen Wert von $n$ ist man an der Menge

$$D_n = \{x | (\exists (y_1, \ldots, y_N)[P(x, n, y_1, \ldots, y_n) = 0]\} \tag{2.20}$$

[35]Es drängt sich aber die Frage auf, ob durch einen reinen Zufallsprozess nicht mit bestimmter Wahrscheinlichkeit eine Folge generiert werden kann, die durch ein Programm mit geringerer Komplexität erzeugt werden kann.

interessiert, d.h. an der Menge der $x$-Werte, $x \in \mathbb{N}$, für die ganze Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ existieren ($\exists$ steht für "es existiert" bzw. "es existieren") derart, dass (2.19) gilt. Die Polynome heißen *polynomiale Diophantische Gleichungen*[36]. Es läßt sich nun zeigen, dass eines der Polynome (2.19) ein "universales Polynom" $P$ ist in dem Sinne, dass eine Variation des Wertes von $n$ zugehörige Mengen $D_n$ liefert, die gerade eine der Mengen von natürlichen Zahlen ist, die überhaupt mit einem Computer erzeugt werden können. Weiter existiert ein $n$, für den die Menge $D_n$ gerade die Menge der Primzahlen ist. Man betrachte die Menge

$$V = \{n | n \notin D_n\}, \tag{2.21}$$

d.h. die Menge der Werte für $n$, die nicht in der korrespondierenden Menge $D_n$ liegen. Diese Menge kann *nicht* durch ein Computerprogramm erzeugt werden, denn $V$ unterscheidet sich gerade von der Menge, die durch das $n$-te Copmputerprogramm erzeugt wird. Dies ist gleichbedeutend damit, dass kein Algorithmus (ein Computerprogramm ist ein Algorithmus!) existiert, der entscheiden könnte, ob für ein gegebenes $n$ die Gleichung (2.19) eine Lösung hat. Dieses Resultat wiederum bedeutet, dass es keine endliche Menge von Axiomen und Schlußregeln geben kann, aufgrund derer bewiesen werden könnte, ob ein gegebenes diophantisches Polynom eine Lösung hat oder nicht. Dies ist eine spezielle Version des Gödelschen Unvollständigkeitstheorems, von dem später noch die Rede sein wird. Die hier interessierende Implikation des Resultats ist, dass die Lösbarkeit bzw. die Unlösbarkeit von (2.19) mathematisch ungewiss ist, d.h. *die Lösbarkeit ist für ein gegebenes $n$ zufällig.*

Die Gleichungen (2.19) sind nur ein Beispiel; eine vollständigere Einführung in die Problematik findet man in Chaitin (1999, 2005). Bis jetzt hat es den Anschein, dass sich alles physikalische Geschehen mathematisch beschreiben läßt. Die hier genannte Zufälligkeit hätte dann ihren Gegenpart in der Physik, und zwar nicht nur wegen der nicht auffindbaren *hidden variables*. Der Zufall wäre ein struktureller Teil der Welt, – und damit natürlich des biologischen Geschehens.

# 3 Akausalität und verborgene Parameter

Wird über die Möglichkeit "reinen Zufalls" diskutiert, wobei mit reinem Zufall ein nicht weiter reduzierbarer Zufall gemeint ist, so wird oft auf den Zerfall atomarer Teilchen verwiesen.[37] Reine Zufälligkeit impliziert exponentialverteilte Wartezeiten zwischen zeitlich benachbartem Zerfall, aber,

[36] Nach Diophantos/Diophant von Alexandria, der sich um 250 mit Gleichungen dieses Typs beschäftigte.

[37] Dank: Ich danke Dr. Oliver Passon vom Zentralinstitut für Angewandte Mathematik (ZAM) des Forschungszentrums Jülich für kritische Anmerkungen zu einer vorangegan-

wie im vorangehenden Abschnitt gezeigt wurde, kann von exponentialverteilten Wartezeiten nicht zwingend auf reine Zufälligkeit (im Sinne der Konstanz der Hazardfunktion) geschlossen werden. Quantenmechanische Prozesse enthalten, der Kopenhagener Deutung gemäß, nicht reduzierbare, "reine" Zufallskomponenten. Die Kopenhagener Deutung ist allerdings nicht unumstritten. Die Diskussion um diese Deutung ist wissenschaftstheoretisch auch für die Psychologie außerordentlich interessant, zum einen, weil z.B. die Frage nach der Entstehung des Bewußtseins gelegentlich mit quantenmechanischen Prozessen in Verbindung gebracht wird – nach Penrose (1989, 1995) spielt der Kollaps der Wellenfunktion hier eine zentrale Rolle –, zum anderen, weil die Diskussion die Rolle der Mathematik bei der Beschreibung bzw. Charakterisierung von natürlichen Prozessen illustriert: die Mathematik erlaubt Charakterisierungen, deren Semantik sich dem intuitiven Verstehen entzieht. Man kann vermuten, dass bei der Charakterisierung des Gehirns als einem komplexen dynamischen Systems Ähnliches zu erwarten ist.

## 3.1 Begriffe der Quantenmechanik (QM)

**Grundlagen:** Newton stellte 1669 die *Emanationstheorie* des Lichts auf, nach der das Licht aus von einer Lichtquelle herausgeschleuderten Partikeln besteht. Huygens stellte 1677 die damit konkurrierende *Wellen-* oder *Undulationstheorie* auf. Zu Newtons Zeiten waren bereits Interferenzerscheinungen, d.h. Effekte von Überlagerungen von Wellen, des Lichts bekannt, nur wurden sie nicht als Wellenphänomene interpretiert (Westphal (1959), p. 478). 1802 lieferte Thomas Young den ersten Nachweis zugunsten der Wellentheorie des Lichts, und im Laufe des 19-ten Jahrhunderts verfestigte sich die Ansicht, dass die experimentellen Befunde, insbesondere die Möglichkeit der Polarisation von Licht, am besten durch die Wellentheorie abgebildet werden. Faraday vermutete, dass das Licht als elektromagnetische Welle interpretiert werden kann, und Maxwell (1871) schlug eine *elektromagnetische Lichttheorie* vor, die er aus seinen allgemeinen Gleichungen zur Elektrodynamik entwickelt hatte. Diese Theorie ist kompatibel mit experimentellen Resultaten von Heinrich Hertz (1886).

Erhitzt man ein Stück Metall hinreichend, so beginnt es zu glühen, d.h. es sendet Licht aus. Bei Raumtemperatur liegt die Strahlung überwiegend im Infrarotbereich und ist deshalb nicht sichtbar; man spricht von *Schwarzkörperstrahlung.* Max Planck (1900) gelang es, diese Strahlung in Bezug auf ihr Spektrum in Abhängigkeit von der Temperatur zu cha-

genen Version dieses Texts, sowie für anregende Hinweise insbesondere zur Interpretation der Bellschen Ungleichungen und der Bohmschen Mechanik, die wesentlich zur Verbesserung des Abschnitts 3 beigetragen haben. Für noch im Abschnitt enthaltene Fehler oder Unklarheiten ist Dr. Passon nicht verantwortlich.

rakterisieren. Demnach wird die Strahlung nicht kontinuierlich, sondern in Form von *Quanten* abgegeben. Die Energie der Quanten ist proportional zur (Kreis-)Frequenz $\omega = 2\pi f$ mit $f = 1/T$, $T$ die Zeit für eine Periode. Der Proportionalitätsfaktor ist $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Joule s und ist als *Plancksche Konstante* bekannt; die Energie $E$ ist durch

$$E = h\omega \tag{3.1}$$

gegeben. Einstein (1905) sah, dass die elektromagnetische Wellentheorie des Lichts mit diesen Befunden unvereinbar ist. Denn dieser Theorie zufolge müßte die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen mit der Intensität (Feldenergie) der Lichtwellen wachsen. Die kinetische Energie ist durch $E_k = h(\omega - \omega_g)$ gegeben, wobei $\omega_g$ eine Grenzfrequenz ist, unterhalb der der lichtelektrische Effekt nicht auftritt (Lenard, 1902); dieser Sachverhalt ist ebenfalls mit der elektromagnetischen Wellentheorie nicht vereinbar. Einstein argumentierte, dass das Licht sich nicht als eine Kugelwelle ausbreitet, sondern in Form von *Lichtquanten (Photonen)*. Diese sind als Energiepakete konzipiert, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Nach Einstein (1905) ist aber $E = mc^2$, $c$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit, und für die Masse eines Photons folgt daraus die Beziehung

$$m = \frac{h\omega}{c^2}, \tag{3.2}$$

und der zur Masse korrespondierende Impuls[38] ist $p = mc$; also folgt $m = p/c = h\omega/c^2$, und damit, wegen $E = mc^2$,

$$p = \frac{h\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad \text{d.h. } \lambda = \frac{c}{\omega}; \tag{3.3}$$

$\lambda$ ist die Wellenlänge des Lichts im Vakuum. Damit wird mit dem Lichtquant nicht nur Energie, sondern auch ein Impuls übertragen, der auf einen vom Photon getroffenen Körper übergeht, sofern der Körper das Photon absorbiert. Damit übt das Photon *Strahlungsdruck* auf den Körper aus. Bohr (1913) modifizierte das Rutherfordsche Atommodell, demzufolge Atome aus einem positiv geladenen Kern und negativ geladenen, den Kern umkreisenden Elektronen bestehen. Bohr postulierte, dass es für die Elektronen (i) nur bestimmte Energiestufen gibt und dass sie sich (ii) nur auf bestimmten, stationären Bahnen aufhalten können. Diese Annahmen widersprechen der klassischen Mechanik, derzufolge sich ein Elektron auf unendlich vielen Bahnen bewegen können müßte. Nach Bohr wird ein Photon ausgesandt, wenn sich ein Elektron sprunghaft von einer Energiestufe auf eine andere – und damit von einer Bahn auf eine andere – bewegt. Hat das Elektron

[38]Der Impuls eines Teilchens ist das Produkt aus seiner Masse $m$ und seiner Geschwindigkeit $v$, also $p = mv$.

auf einer Bahn die Energie $E_m$ und auf der anderen die Energie $E_n$ und ist $E_m < E_n$, so wird die Energiedifferenz

$$h\omega = E_n - E_m \tag{3.4}$$

frei, und $h\omega$ entspricht einem Photon. Damit ist die Frequenz $\omega$ des Lichts durch die Energiedifferenz der Bahnen bestimmt. Umgekehrt muß dem Atom die Energie $h\omega$ zugeführt werden, damit ein Elektron von der Bahn mit der Energie $E_m$ auf eine Bahn mit der Energie $E_n$ überführt wird.

**Freie Schrödingergleichung** Eine Welle läßt sich durch eine Funktion $\psi(x, t)$, die Wellenfunktion, beschreiben, wobei der Einfachheit halber nur der eindimensionale Fall betrachtet wird. $\psi$ ist die Auslenkung am Ort $x$ zur Zeit $t$. $\psi$ läßt sich durch eine Differentialgleichung beschreiben, d.h. durch Gleichungen, bei denen Ableitungen (Differentialquotienten) von $\psi$ zu Werten von $\psi$ in Beziehung gesetzt werden; die Lösungen solcher Gleichungen sind Ausdrücke für $\psi$. Die Differentialgleichungen heißen *linear*, wenn mit Lösungen $\psi_j$ auch die Summen $\sum_j c_j\psi_j$ Lösungen der Gleichung sind. Die Gleichung genügt dann dem *Superpositionsprinzip*.

Wenn ein Photon auch Welleneigenschaften hat, so kann es durch eine entsprechende Wellengleichung beschrieben werden. Louis de Broglie (1923) verallgemeinerte das Welle-/Partikelmodell des Lichts zu einem allgemeinen Materiemodell. Seinem Ansatz zufolge kann auch für Elektronen und andere Elementarteilchen ein Wellenmodell angeschrieben werden. Demnach kann ein Teilchen als Wellenpaket aufgefasst werden: solche Pakete entstehen durch Überlagerung (Superposition) von Sinuswellen verschiedener Frequenz, Phase und Amplitude. Schrödinger (1926) stellte dann, ausgehend vom de Broglieschen Ansatz, eine allgemeine Wellengleichung für die Elektronenwellen auf; dies ist die Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion $\psi(x, t)$. Für freie Elektronen mit dem Impuls $p$ und der Energie $E = p^2/2m$ hat $\psi$ die Form

$$\psi(x, t) = C \exp(i(k \cdot x - \omega t)), \tag{3.5}$$

wobei, mit $\hbar = h/2\pi$, $h$ das Plancksche Wirkungsquantum, $\omega = E/\hbar$, $k = p/\hbar$ und $i = \sqrt{-1}$.

In der Mechanik sind Wellenfunktionen, etwa die für eine schwingende Saite, reelle Funktionen. In der Quantenmechanik dagegen ist $\psi$ ist eine komplexe Funktion[39], und die Frage ist, wie sie zu deuten ist. Nach Born

[39]Eine Zahl $\psi$ heißt *komplex*, wenn $\psi = x + iy$ gilt, wobei $i = \sqrt{-1}$ und $x$, $y$ reelle Zahlen sind; $x$ ist der Real-, $y$ der Imaginärteil von $\psi$. $\psi^*$ heißt die zu $\psi$ konjugiert komplexe Zahl, wenn $\psi^* = x - iy$. Es ist $\psi\psi^* = |\psi|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + iyx - (iy)^2 = x^2 + y^2$, denn $i^2 = -1$. $|\psi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag von $\psi$. In Polarform ergibt sich $\psi = |\psi| \exp(i\phi)$ mit $\phi = \tan^{-1}(y/x)$, wobei von der Eulerschen Relation $\exp(i\phi) = \cos\phi + i \sin\phi$ Gebrauch gemacht wurde.

(1926) ist

$$P = \psi^*(x,y,z)\psi(x,y,z)dxdydz = |\psi|^2 dxdydz \tag{3.6}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Partikel im Volumenelement $dx \times dy \times dz$ um die Position $(x, y, z)$ befindet. Die komplexe Funktion $\psi$ selbst hat gewissermaßen nur symbolischen Charakter und dient nur dazu, die Beziehung zwischen den Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Größen wie Ort und Impuls zu etablieren (Pauli, 1958/1980).

**Zustand und Zustandsvektor:** Der Einfachheit halber werde der eindimensionale Fall betrachtet, die Verallgemeinerung auf den allgemeinen Fall ist einfach.

$\psi(x,t)$ definiert den Zustand eines quantenmechanischen Systems; die Variable $t$ wird gelegentlich zur Vereinfachung unterdrückt, so dass einfach nur $\psi(x)$ geschrieben wird. Die die Wellenfunktion (3.5) definierende Differentialgleichung, d.h. die ihr entsprechende Schrödinger-Gleichung, ist linear, so dass mit Lösungen $\psi_n$ auch die Summe der $\psi_n$ eine Lösung ist. Ein Beispiel ist

$$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \tag{3.7}$$

(Energiedarstellung). Die Koeffizienten $c_n$ sind dabei komplexe Zahlen, und die $\psi_n$ heißen *Basisfunktionen* (Schwabl (1990), p. 144); $\psi(x)$ ist dann durch den Vektor

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

definiert[40]. Die Anzahl der Komponenten $c_n$ kann unendlich sein; man schreibt auch

$$\psi(x) \to |\psi\rangle \tag{3.8}$$

und nennt $|\psi\rangle$ den *Zustandsvektor* (etwa: $\psi$ wird durch $|\psi\rangle$ abgebildet). Es sei $x$ eine zu messende Größe ("Observable"), etwa der Ort, oder der Impuls eines Teilchens. Ihr Erwartungswert (Mittelwert über alle möglichen Realisierungen von $x$) werde mit $\langle x\rangle$ bezeichnet; es gilt dann

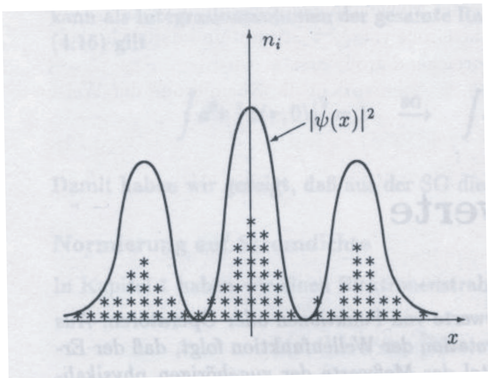
$$\langle x\rangle = \int xP(x)dx = \int \psi^*(x)x\psi(x)dx, \tag{3.9}$$

und der Erwartungswert einer Funktion $f(x)$ ist dann

$$\langle f(x)\rangle = \int \psi^*(x)f(x)\psi(x)dx = \sum_n f_n|c_n|^2 \tag{3.10}$$

[40] $|\ \rangle$ ist die auf Paul Dirac zurückgehende Bra-Ket-Darstellung des Vektors (von engl. bracket = Klammer).

Abbildung 8: Verteilung von Messungen des Ortes ($N = 75$) am selben System mit $|\psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$ (Elektron in einem bestimmten Zustand im Wasserstoffatom). Jeder Stern steht für eine Messung im $\delta x$-Intervall an $x_i = i\delta x$. Nach Fließbach (1995)




wobei $f_n$ der zu $\psi_n$ in (3.7) korrespondierende Wert der Observablen $f(x)$ ist; $|c_n|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand $|n\rangle$ ist.

**Der Messprozess:** Es werde etwa der Ort eines Teilchens gemessen. Natürlich wird nicht immer dasselbe Teilchen gemessen, sondern verschiedene Teilchen, aber unter identischen Bedingungen. Dazu wird die $x$-Achse in Intervalle der Breite $\delta x$ aufgeteilt; $\delta x$ definiert die Genauigkeit der Messungen. Für eine Messung $\xi_i$ setzt man $\xi_i = x_i$, wenn $\xi_i$ in das $i$-te Intervall fällt. Man erhält etwa $n_i$-mal den Wert $x_i$, $N = \sum_i n_i$, und

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N} = |\psi(x,t)|^2 \delta x, \tag{3.11}$$

vergl. Abb. 8. Für $N$ Messungen des Impulses gelten analoge Betrachtungen.

Es seien $\langle x\rangle$ und $\langle p\rangle$ die Mittelwerte für Messungen des Ortes bzw. des Impulses, und

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle \tag{3.12}$$
$$(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p\rangle)^2\rangle \tag{3.13}$$

seien die entsprechenden Varianzen der Orts- bzw Impulsmessungen. Die Größen $\Delta x$ und $\Delta p$ heißen auch *Unschärfen*. Es läßt sich dann zeigen (Heisenberg, 1927), dass insbesondere

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3.14}$$

Dies ist die *Unschärferelation* für den Ort und den Impuls; je genauer man den Impuls $p$ mißt, je kleiner also $\Delta p$ ist, desto größer ist $\Delta x$, und umgekehrt. Unschärferelationen gelten nicht nur für den Ort und den Impuls, sondern ebenso für den Drehwinkel und den Drehimpuls eines Teilchens, oder für die Variablen Zeit und Energie, – allgemein für alle Größen, die über eine Fouriertransformation[41] aufeinander bezogen sind (vergl. etwa Bracewell (1978), p. 160).

**Determiniertheit:** Die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ ist eine *deterministische Funktion*, die zeitliche Entwicklung des durch sie beschriebenen Systems ist demnach völlig festgelegt, d.h. determiniert. Wie gerade beschrieben, sind die Meßgrößen, z.B. Ort und Impuls, allerdings in der QM[42] nicht determiniert, sie können nicht zu einem bestimmten Zeitpunkt *simultan* festgelegt werden. Dieser Sachverhalt ergibt sich durch die Beschreibung des betrachteten Systems durch eine Wellenfunktion; in der Tat ergeben sich Unschärferelationen für alle Größen, die über eine Fourier-Transformation aufeinander bezogen sind (natürlich tritt bei nicht-quantenphysikalischen Variablen nicht die Größe $\hbar$ in der Genauigkeitsschranke auf). Für die Interpretation der QM gibt es, so Fließbach (1995), zwei Grundpositionen:

1. *Realistische Position:* Ort und Impuls sind an sich wohl definiert; nur die unvermeidliche Störung des Systems durch den Meßvorgang hindert uns daran, beide Größen zugleich genau zu bestimmen. Die Wellenfunktion entspricht einer unvollständigen, statistischen Beschreibung vieler Teilchen und führt daher zu Wahrscheinlichkeitsaussagen. Nach dieser Interpretation ist die Quantenmechanik eine unvollständige Beschreibung.

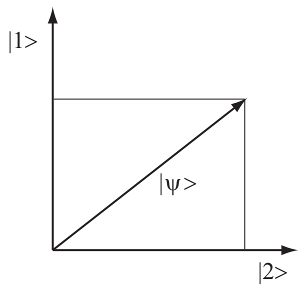
2. *Kopenhagener Position:* Begriffe wie Ort und Impuls sind im mikroskopischen Bereich nicht anwendbar. Es gibt kein anschauliches Vorstellungsbild mehr für das Elektron im Wasserstoffatom. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\psi(x,t)$ ist die gültige und vollständige Beschreibung. Die Kopenhagener Interpretation wurde insbesondere von Niels Bohr entwickelt; die Darstellung in Fließbach (1995) entspricht dieser Interpretation.

Die Kopenhagener Position wird hier sehr knapp beschrieben. Tatsächlich ist diese Position nicht so einheitlich, wie es hier suggeriert wird (vergl. unten). Hinzu kommt, dass angenommen wird, dass die Wahrscheinlichkeiten

[41] Es sei $f$ eine Funktion des Ortes oder der Zeit. Alle hier betrachteten Funktionen $f$ lassen sich als Summen von Sinusfunktionen $|F(\omega)|\sin(\omega x + \varphi(\omega))$ bzw. Integrale über $\omega$ darstellen, wobei $|F(\omega)|$ die Amplitude und $\varphi(\omega)$ die Phase für die Frequenz $\omega$ ist. $F(\omega)$ heißt Fouriertransformierte von $f$. $F$ ist eine komplexe Funktion, d.h. es gilt i.a. $F(\omega) = F_1(\omega) + iF_2(\omega)$, wobei $F_1$ und $F_2$ reelle Funktionen von $\omega$ sind, und $|F|^2 = F_1^2 + F_2^2$, $\varphi = \tan^{-1} F_2/F_1$.

[42] QM = Quantenmechanik

Abbildung 9: Zustandsvektor $|\psi\rangle$ und seine Projektion auf zwei Basisvektoren $|\psi_1\rangle = |1\rangle$ und $|\psi_2\rangle = |2\rangle$; das Quadrat der Länge von $|\psi\rangle$ ist, nach Pythagoras, die Summe der Quadrate der Projektionen auf $|1\rangle$ und $|2\rangle$. Nach Audretsch (1996).




*reine Zufälligkeit* reflektieren sollen, d.h. sie sollen nicht einfach nur Unwissenheit von im Übrigen deterministischen Prozessen reflektieren. Dieser Aspekt soll im Folgenden näher diskutiert werden; dazu muß zunächst das *Messproblem* vorgestellt werden.

## 3.2 Das Messproblem der QM

Nach (3.7) gelte

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle.$$

Es läßt sich zeigen, dass für einen bestimmten Messvorgang mit der Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$ der Wert $c_n$ gemessen wird. Der Zustand $|\psi\rangle$ – er entspricht einer bestimmten *Observablen* – muß sich nach der Messung verändert haben, damit sich bei einer erneuten Messung wieder der Wert $c_n$ ergeben kann. Der Fall der Repräsentation eines Einheitsvektors (also eines Vektors mit der Länge 1) $|\psi\rangle$ durch zwei Basisvektoren $|1\rangle = |\psi_1\rangle$ und $|2\rangle = |\psi_2\rangle$ wird in Abb. 9 illustriert. $\psi_1$ und $\psi_2$ heißen auch Eigenzustände. Bezeichnet man die Projektionen mit $|c_1|$ bzw. $|c_2|$, so sieht man, dass $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Nach der Messung stimmt $|\psi\rangle$ mit entweder $|1\rangle|$ oder mit $|2\rangle$ überein, und zwar mit den Wahrscheinlichkeiten $|c_1|$ bzw. $|c_2|$. Dies ist die *Zustandsreduktion* bzw. der *Kollaps der Wellenfunktion*; diesen Begriff hat Heisenberg (1927) eingeführt (Kiefer, 2002)).

Passon (2004) hat das Messproblem wie folgt formuliert. Es seien $\psi_1$ und $\psi_2$ die Eigenzustände einer 2-wertigen Observablen, und $\Phi_1$ und $\Phi_2$ seien die Zustände (Zeigerstellungen) des Meßgeräts nach Messung dieser Zustände. $\Phi_0$ sei der Anfangszustand des Meßgeräts. Die zeitliche Entwicklung des gemessenen Systems während des Messvorgangs[43] $\psi_j \otimes \Phi_0$, $j = 1, 2$ werde mit $\hat{U}$ bezeichnet. Dann muß

$$\begin{aligned}\hat{U}(\psi_1 \otimes \Phi_0) &= \psi_1 \otimes \Phi_1 \\ \hat{U}(\psi_2 \otimes \Phi_0) &= \psi_2 \otimes \Phi_2\end{aligned}$$

gelten. Der Systemzustand $\psi$ ist aber i.a. durch Überlagerungen charakterisiert, so dass etwa $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ gilt, und da die Schrödingergleichung linear ist, folgt

$$\hat{U}(\psi \otimes \Phi_0) = c_1\psi_1 \otimes \Phi_1 + c_2\psi_2 \otimes \Phi_2. \tag{3.15}$$

$\hat{U}(\psi \otimes \Phi_0)$ ist also kein eindeutiges Ergebnis (formal: $\hat{U}(\psi \otimes \Phi_0)$ ist kein Eigenzustand des Messgeräts), es wird also anscheinend kein eindeutig definierter Wert repräsentiert. Andererseits ergibt sich, mit der Wahrscheinlichkeit $|c_j|^2$, das Messergebnis $\Phi_j$. Das Messproblem der QM besteht darin, dass die Zeitentwicklung der Schrödingergleichung nicht auf in der Realität vorkommende Zustände führt. Der Kollaps der Wellenfunktion kann aus der QM nicht vorhergesagt werden und muß also als ein zusätzliches Axiom eingeführt werden.

## 3.3 Zur Kopenhagener Position

Es sollen noch einige Anmerkungen zur Kopenhagener Position gemacht werden. Dazu sollte vielleicht noch einmal gesagt werden, was den Kern des Ansatzes der klassischen Physik ausmacht, der wohl auch der Idealvorstellung für das Experimentieren in der Psychologie unterliegt. Scheibe (1996) nennt dazu die Kriterien (1) Beobachtungsfreiheit, und (2) Wahrscheinlichkeitsfreiheit. In der Psychologie hat man sich daran gewöhnt, häufig nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen zu können, was aber i.a. nicht bedeutet, dass man die Nichtexistenz von Kausalitäten annimmt, sondern Wahrscheinlichkeiten als Maß des Effekts unkontrollierter Variablen ansieht. Man macht, so Scheibe, *ontische* Aussagen, mit denen man einem System Eigenschaften zu- oder abspricht (ein Teilchen hat zu gegebener Zeit einen bestimmten Ort, etc). Ontische Aussagen seien beobachtungsfrei, weil sie unabhängig von der Art, in der eine Beobachtung gemacht wird, aufgestellt werden, außerdem gehen keine Wahrscheinlichkeitsaussagen in sie ein. Die Aussagen der klassischen Physik seien objektiviert und determiniert. Man könne den ontischen Aussagen aber auch eine *epistemische Formulierung* geben, indem man Aussagen der Art macht, dass bestimmte Eigenschaften eines Systems durch Messung festgestellt werden könnten, oder dass es diese Eigenschaften mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit

[43] $\bigotimes$ steht für das Tensorprodukt; es genügt, für das Folgende mit $\bigotimes$ die Repräsentation der Beziehung zwischen dem zu messenden System und dem Meßgerät zu meinen.

habe. Durch solche Aussagen sagt man etwas über die epistemische Beziehung zum System, nicht aber über das System selbst aus. Für die Kopenhagener Deutung der QM dagegen gelte, dass bei den physikalischen Aussagen auf die experimentelle Anordnung Bezug genommen werden müsse und für die Zustandsbeschreibungen Wahrscheinlichkeiten notwendig seien; statistische Aussagen müssen nach Pauli als "*endgültige*, irreduzible Tatsache der Gesetzlichkeit betrachtet" werden.

Passon (2004) verweist auf eine Arbeit von Howard[44], der aufzeigt, dass die Kopenhagener Position (vergl. Fließbachs (1995) oben notierte kurze Darstellung der Kopenhagener Position) im wesentlichen eine Position Heisenbergs ist, die von der Bohrs in vielen Punkten abweicht. Howard zufolge gilt

> "The idea that there was a unitary Copenhagen point of view on interpretation was [$\cdots$] a post-war invention, for which Heisenberg was chiefly responsible. Many other physicists and philosophers, each with his own agenda, contributed to the promotion of this invention for polemical or rhetorical purposes. The list includes David Bohm, Paul Feyerabend, Norwood Russel Hanson, and, most importantly, Karl Popper. Understanding the motivations of these actors will carry us a long way toward understanding how views so alien to Bohr could have been foisted upon him."

Passon (2004) erläutert die "offizielle" – also Heisenbergsche – Version anhand dessen Arbeit *Die Kopenhagener Deutung der Quantentheorie* (in Heisenberg (1959/1990)[45]); hier soll kurz insbesondere auf Anmerkungen Heisenbergs bezüglich der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Messergebnisse eingegangen werden.

Demnach ist der Kern der Kopenhagener Deutung (oder Position) die Tatsache, dass physikalische Experimente in "Begriffen der klassischen Physik" beschrieben werden; diese Begriffe bilden die Sprache, in der der Aufbau der Experimente sowie deren Ergebnisse beschrieben werden. Gleichzeitig wissen wir,

> "dass diese Begriffe nicht genau auf die Natur passen. Die Spannung zwischen diesen beiden Ausgangspunkten ist für den statistischen Charakter der Quantentheorie verantwortlich." (p. 38)

Aber "... die Anwendbarkeit dieser Begriffe ist begrenzt durch die Unbestimmtheitsrelationen". Für Messungen etwa des Orts und der Geschwin-

[44]Who invented the "Copenhagen Interpretation"? A study in Mythology. Weitere Angaben im Literaturverzeichnis.

[45]Heisenberg, W.: *Physik und Philosophie*, Frankfurt M – Berlin, 1959/1990

digkeit eines Elektrons wird "eine Wahrscheinlichkeitsfunktion niedergeschrieben, die die experimentelle Situation zur Zeit der Messung darstellt, einschließlich der möglichen Ungenauigkeit der Messung." Die Wahrscheinlichkeitsfunktion stelle eine Mischung aus verschiedenen Elementen dar: "teilweise eine Tatsache, teilweise den Grad unserer Kenntnis einer Tatsache". Die Wahrscheinlichkeitsfunktion erlaubt "keine raum-zeitliche Beschreibung dessen [$\cdots$], was zwischen zwei Beobachtungen geschieht". Weiter schreibt Heisenberg, dass die Änderung der Wahrscheinlichkeitsfunktion (WF) kontinuierlich in der Zeit verläuft, und objektive und subjektive Elemente in sich vereinige (p. 35); die subjektive Komponente der WF besteht in "Aussagen über unsere Kenntnis des Systems ... die ja für verschiedene Beobachter verschieden sein können." Dann (p. 36 unten):

> "Die Beobachtung ändert die Wahrscheinlichkeitsfunktion unstetig. Sie wählt von allen möglichen Vorgängen den aus, der tatsächlich stattgefunden hat. Da sich durch unsere Beobachtung unsere Kenntnis des Systems unstetig geändert hat, hat sich auch ihre mathematische Darstellung unstetig geändert, und wir sprechen von einem "Quantensprung". Wenn man aus dem alten Spruch 'Natura non facit saltus' eine Kritik der Quantentheorie ableiten wollte, so können wir antworten, dass sich unsere Kenntnis doch sicher plötzlich ändern kann und dass eben diese Tatsache, die unstetige Änderung unserer Kenntnis, den Gebrauch des Begriffs 'Quantensprung' rechtfertigt."

Heisenberg spezifiziert dann den Begriff der Beobachtung; er charakterisiere nicht einen psychischen, sondern einen physikalischen Akt, der einen "Übergang vom Möglichen zum Faktischen" aufgrund einer Wechselwirkung der zu messenden Grösse und der Messanordnung impliziere. Es ist der physikalische Akt der Registrierung, nicht die bewußte Wahrnehmung des Beobachters, der eine "unstetige Änderung unserer Kenntnis", die durch eine "unstetige Änderung der Wahrscheinlichkeitsfunktion abgebildet wird." (p. 37). Heisenberg ist hier wesentlich zurückhaltender als Wigner (1995), der die Hypothese diskutierte, dass es das Bewußtsein des menschlichen Beobachters sei, das den Kollaps der Wellenfunktion verursache (zitiert nach Kiefer (2000)).

Wesentlich für die Heisenbergsche Position ist, dass die statistischen Aspekte des Messprozesses nicht lediglich Unwissenheit über nicht beobachtbare Prozesse zurückzuführen seien, sondern dass Annahmen über derartige Prozesse nicht möglich und nicht nötig seien. v. Weizsäcker berichtet, dass Heisenberg ihm im April 1927 während einer Taxifahrt in Berlin gesagt habe, "Du, ich glaube, ich habe das Kausalgesetz widerlegt" (v. Weizsäcker (1999), p. 315).

Nach v. Weizsäcker (1985) (p. 503) ist es aber nicht die mögliche Akausalität der Quantenmechanik, die den Kern der Kopenhagener Deutung bildet. 1927 sei es wegen unterschiedlicher Auffassungen bezüglich der Deutung der QM zu Spannungen zwischen Bohr und Heisenberg gekommen. Man einigte sich schließlich darauf, dass die Komplementarität der Grund für die Unbestimmtheit sei. "Materie und Licht sind 'an sich' *weder* Teilchen *noch* Welle. Wenn wir sie aber für unsere Anschauung beschreiben wollen, so müssen wir beide Bilder gebrauchen. Und die Gültigkeit des einen Bildes erzwingt gleichzeitig die Gültigkeitsgrenzen des anderen. Dies ist der Kern der Kopenhagener Deutung."

Heisenberg hat die Begriffsbildung der Komplementarität in seinem Buch *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie* (1958/2001) kritisiert bzw. in einer von der ursprünglichen Bohrschen Fassung abweichenden Weise charakterisiert (p. 7):

> "Nun ist es klar, dass die Materie nicht gleichzeitig aus Wellen und Partikeln bestehen kann, die beiden Vorstellungen sind viel zu verschieden. Vielmehr muß die Lösung der Schwierigkeit darin zu suchen sein, dass beide Bilder (Partikel- und Wellenbild) nur ein Recht als Analogien beanspruchen können, die manchmal zutreffen und manchmal versagen. In der Tat ist z.B. experimentell nur nachgewiesen, dass sich Elektronen in gewissen Experimenten wie Teilchen verhalten, aber durchaus nicht gezeigt, dass die Elektronen alle Attribute des Korpuskularbildes besitzen. Das gleiche gilt mutatis mutandis für das Wellenbild. Beide Vorstellungen können als Analogien nur in gewissen Grenzfällen Gültigkeit beanspruchen; als Ganzes sind aber die Atomphänomene nicht unmittelbar in unserer Sprache beschreibbar. *Licht und Materie sind einheitliche physikalische Phänomene, ihre scheinbare Doppelnatur liegt an der wesentlichen Unzulänglichkeit unserer Sprache.*" (Hervorhebung hinzugefügt!)

Heisenberg führt weiter aus, dass es *nicht* merkwürdig sei, dass wir mit unserer "normalen" Sprache atomare Prozesse nicht adäquat beschreiben können, da unsere Begriffe auf die Erfahrungen des täglichen Lebens zurückgingen, "in denen wir es stets mit großen Mengen von Atomen zu tun haben, jedoch nie einzelne Atome beobachten." Die Anschauung sei für die Beschreibung solcher Prozesse auch gar nicht nötig, die Beschreibung werde durch "das mathematische Schema der Quantentheorie" besorgt; die anschauliche Beschreibung müsse sich mit der unvollständigen Analogie des Wellen- und Partikelbildes begnügen. Diese Bemerkungen greifen über die hier diskutierte Frage nach stochastischen Natur der quantenphysikalischen Prozesse hinaus und verweisen auf einen interessanten Zusammenhang zwischen dem Begriff des Verstehens und der Rolle der Mathematik bei der

Beschreibung natürlicher Phänomene, auf den an anderer Stelle noch weiter eingegangen werden wird (Abschnitt **??**). "Ohne Mathematik [können] physikalische Probleme nicht angegriffen werden" (Heisenberg (1958/2001), p. 8), – dies gilt möglicherweise auch für bestimmte Fragen der Psychologie.

Ebenfalls in den *Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* bringt Heisenberg die Frage nach der Kausalität mit den Unschärferelationen in einen Zusammenhang. Das Problem besteht darin, dass die Beobachtung des Meßinstruments selbst nicht frei von Unbestimmtheit ist:

> "... wir müßten etwa auch unsere Augen mit in das System einschließen, um an dieser Stelle der Unbestimmtheit zu entgehen, usw. Schließlich könnte man die Kette von Ursache und Wirkung nur dann quantitativ verfolgen, wenn man das ganze Universum in das System einbezöge – dann aber ist die Physik verschwunden und nur ein mathematisches System geblieben. Die Teilung der Welt in das beobachtende und das zu beobachtende System verhindert also die scharfe Formulierung des Kausalgesetzes. (Das beobachtende System braucht dabei keineswegs ein menschlicher Beobachter zu sein, an seine Stelle können auch Apparate, wie photographische Platten usw. gesetzt werden.)" (Heisenberg (1958/2001), p. 44)

### 3.4 Einsteins Unbehagen

Einstein war mit der Entwicklung der Quantentheorie nicht zufrieden; gemäß Fine (2004) ergab sich Einsteins Unbehagen aus

1. der klassischen Forderung der Naturwissenschaft, dass die natürlichen Phänomene unabhängig vom Beobachter sein sollten,

2. die Quantentheorie machte, gemäß der Kopenhagener/Heisenbergschen Formulierung, keine Aussagen über die physikalischen Prozesse, so lange diese nicht beobachtet wurden; die Theorie war in diesem Sinne nicht *realistisch*, und

3. die Theorie war intrinsisch statistisch, wobei die Wahrscheinlichkeiten aber nicht – wie in der statistischen Mechanik – lediglich Unwissen repräsentieren, sondern fundamentale, nicht weiter reduzierbare Größen darstellen.

In der Quantenmechanik werden nicht individuelle Ereignisse bestimmt, sondern große Kollektive von Ereignissen; Pauli (1948) hat dafür den Begriff der "statistischen Kausalität" eingeführt. Für Einstein war dieser probabilistischer Aspekt ein "besonders ärgerliches Merkmal" der Quantenmechanik

(Mittelstaedt (2006), p. 5). In einem Brief an F. Reiche schreibt Einstein (1942) (zitiert nach Mittelstaedt (2006), p. 6; weitere Angaben dort):

> "I still do not believe that the Lord God plays dice. If he wanted to do this, then he would have done it thoroughly and not stopped with a plan for gambling [...]. Then we wouldn't have to search for laws at all."

Für Einstein war die Quantentheorie *unvollständig*. 1935 erschien eine Arbeit von Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) mit dem Titel *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*. Die Arbeit ist nicht leicht lesbar[46], Fine liefert aber eine gute Einführung. In der Arbeit wird ein Gedankenexperiment vorgeschlagen, anhand dessen nachgewiesen werden soll, dass die Quantenmechanik unvollständig ist.

**Das Gedankenexperiment:** Das Gedankenexperiment wird i.a. in der Version von Bohm (1951) beschrieben. Dazu wird ein System betrachtet, das aus zwei Teilsystemen $A$ ("spin up" $\uparrow$) und $B$ ("spin down" $\downarrow$) besteht, und dessen Gesamtspin gleich Null ist:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right) \tag{3.16}$$

Das System ist also durch eine Superposition definiert; es ist ein *verschränktes System*, da zwischen den Teilsystemen Korrelationen bestehen. Generell gilt nun die Drehmoment-, also die Spinerhaltung. Dies bedeutet, dass für $B$ sicherlich der Spin $\downarrow$ gilt, wenn man für $A$ den Spin $\uparrow$ gemessen hat. Werden die beiden Teilchen von einer Quelle ausgesendet und bewegen sich voneinander weg, so findet man bei einer Messung des Spins eines Teilchens den Spin $\uparrow$, so findet man beim anderen Teilchen den Spin $\downarrow$, und umgekehrt. Die eigentliche Merkwürdigkeit entsteht dadurch, dass der Spin eines Teilchens erst durch die oder während der Messung festgelegt wird, – und damit auch der Spin des anderen Teilchens. Es kommt zu dem, was Einstein als "spukhafte Fernwirkung" bezeichnet hat, zumal dieses Geschehen unabhängig von der Entfernung der Teilchen stattfindet.

Dies bedeutet die Nichtlokalität der Quantenmechanik. Die Nichtlokalität wird von der Existenz von Mehrteilchensystemen und der linearen Superponierbarkeit von Zuständen impliziert (vergl. Schwabl (1990), p. 348). Das Resultat der Messung an einem Teilchen wird nicht als Information an das andere Teilchen *übertragen*, es gibt also keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie.

[46] Einstein selbst war unzufrieden mit der, wie er in einem Brief an Schrödinger 1935 schreibt, aus (fremd-)sprachlichen Gründen von Podolsky geschriebenen Fassung; das Wesentliche an der Arbeit sei "unter zu viel Gelehrsamkeit" begraben (zitiert nach Fine).

Einstein, Podolsky und Rosen folgerten aus diesen Überlegungen, dass die Quantentheorie unvollständig sei. Denn wegen der Separation der Teilchen könne keine Beeinflussung des einen Teilchens durch das andere stattgefunden haben, also müßten die Spinzustände schon vor der Messung festgelegen haben. Während Einstein aus diesem Befund nicht folgern wollte, dass es verborgene Variablen geben müsse, ist die Existenz verborgener Variablen oft aus dem Gedankenexperiment abgeleitet worden, d.h. man hat angenommen, dass eine Theorie formulierbar sein müsse, in der diese verborgenen Variablen definiert seien und die das Ergebnis des Gedankenexperiments zu erklären gestatte; es gelte die Forderung "every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory", und es wird das in der Literatur so genannte *Realitätskriterium* (EPR Criterion of Reality) aufgestellt:

> "If, without in any way disturbing the system, we can predict with certainty (i.e. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of reality corresponding to that quantity." (zitiert nach Mittelstaedt (2006))

In EPR werden nun zwei Annahmen gemacht:

1. *Separabilität:* Zu der Zeit, zu der Messungen an $A$ ausgeführt werden, existiert Realität auch für $B$. $B$ hat eine *separate* Realtität, auch wenn es mit $A$ verbunden ist.

2. *Lokalität:* Keine wirkliche Veränderung kann in $B$ stattfinden als Konsequenz einer Messung, die an $A$ durchgeführt wird. EPR: "At the time of measurements the systems no longer interact".

Aus der Lokalität folgern EPR, dass – entgegen der Unschärferelation – das Teilsystem $B$ reale Werte sowohl für den Ort als auch für den Impuls haben kann. Wird das Teilystem $A$ gemessen, so impliziere die Reduktion des Zustandsvektors einen Positionszustand für $B$, die mit Wahrscheinlichkeit 1 bestimmt werden könne. Diese Vorhersage beruht auf der Messung an $A$, und die Forderung der Lokalität impliziert dann, dass die Vorhersage der Position von $B$ keine Veränderung der Realität in $B$ bedeutet. Eine analoge Argumentation ergibt sich für den Impuls. EPR argumentieren – auf die Details der Argumentation kann hier nicht ausführlich eingegangen werden –, dass, wenn miteinander interagierende Systeme der Bedingungen der Separabilität und Lokalität genügen und das Realitätskriterium gilt, eine Beschreibung des Gesamtsystems durch den Zustandsvektor $|\psi\rangle$ nicht vollständig sei.

**Verborgene Variablen:** Obwohl EPR nicht explizit die Existenz die Quantenmechanik vervollständigender "verborgener Variablen" postulieren, legt ihre Argumentation doch die Annahme der Existenz solcher Variablen nahe. Die experimentellen Vorhersagen könnten dann nach wie vor stochastisch sein, aber die Zufälligkeit von Messergebnissen (nach Maßgabe der durch $|\psi|$ gegebenen Wahrscheinlichkeiten), würde dann nicht mehr auf eine Akausalität der Beobachtungen, sondern nur auf Unwissenheit verweisen.

Eine erste Untersuchung zur Existenz verborgener Variablen wurde von John von Neumann (1932) durchgeführt. Er legte einen Beweis vor, demzufolge solche Variablen nicht existieren können. Die v. Neumannsche Arbeit war außerordentlich einflußreich, allerdings läßt sich zeigen, dass die Annahmen, auf denen der v. Neumannsche Beweis beruht, außerordentlich restriktiv sind (vergl. Passon (2004), p. 43). In anderen Worten, die Möglichkeit der Existenz verborgener Variablen wird durch von Neumanns Beweis nicht zwingend ausgeräumt. Es wurden weitere Beweise für die Unmöglichkeit verborgener Variablen vorgelegt, etwa von Gleason (1957) und Kochen und Specker (1967), deren Annahmen weniger restriktiv sind als die von Neumanns. Wie Passon (2004) ausführt, machen diese Arbeiten wesentliche Aussagen über Einschränkungen, denen jede Theorie verborgener Variablen genügen muß, damit sie mit den Ergebnissen der Quantenmechanik kompatibel sind; tatsächlich aber räumten sie die Möglichkeit verborgener Variablen nicht aus.

## 3.5 Die Bellschen Ungleichungen

Bell (1964) ging davon aus, dass die Argumentation von EPR impliziert, dass die Quantenmechanik durch zusätzliche Variablen ("verborgene Variablen", "hidden variables") komplettiert werden müsse, "to restore to the theory causality and locality". Bell bezeichnet den von Neumannschen Beweis der Unmöglichkeit von "hidden variable"-Theorien der Quantenmechanik als unzulänglich. Bell zeigt dann, dass der Ansatz, Kausalität *und* Lokalität in die Quantenmechanik einzuführen, mit den statistischen Vorhersagen der Quantenmechanik inkompatibel ist: "no local hidden-variable theory can reproduce all of the statistical predictions of quantum mechanics" (Clausner et al., 1969). Bell betrachtet ein Paar von Partikeln mit einem Spin von $\vec{\sigma}_1 = +1$ und $\vec{\sigma}_2 = -1$; der Gesamtspin des Paares ist also gleich Null (das Paar ist in einem *Singulett-Zustand*). Wird bei einem Partikel der Spin $+1$ gemessen, so weiß man aufgrund der Quantenmechanik, dass der Spin des anderen Partikels gleich -1 ist. Geht man nun von der Einsteinschen Hypothese aus, dass bei hinreichender Distanz der Partikel der Zustand des einen Partikels unabhängig vom Zustand des anderen ist (dies ist die Lokalitätsforderung), so folgt, dass das Resultat der Messung des Spins des einen Partikels das Resultat der Messung des anderen Spins in irgendeiner Weise vorher bestimmt. Da die Wellenfunktion das Resultat einer Messung nicht vorherbestimmt, liegt die Vermutung nahe, dass die

Spezifikation des Zustands durch die Wellenfunktion nicht vollständig ist. Bell repräsentiert die Vollständigkeit durch Einführung bestimmter Parameter $\lambda$ und bestimmt den korrespondierenden Erwartungswert des Wertes des Produkts der Messungen an den beiden Partikeln, der, wenn der Ansatz korrekt ist, dem Wert entsprechen sollte, der aufgrund der Quantenmechanik vorhergesagt wird. Passon (2004) liefert eine sehr anschauliche Herleitung des Bellschen Resultats bzw. der diesem Resultat entsprechenen Ungleichungen; diese Ungleichungen sind mit den entsprechenden Vorhersagen der Quantenmechanik nicht kompatibel.

Das Bellsche Resultat hat grundsätzliche Bedeutung für die Quantenmechanik und liefert die Grundlage für die Planung eines Experiments bezüglich möglicher *hidden-variable* bzw. lokaler Theorien; die Struktur eines solchen Experiments wurde von Clausner et al. (1969) geliefert, die dazu eine Verallgemeinerung des Bellschen Beweises liefern. Aspect, Grangier und Roger (1981) lieferten dann experimentelle Daten, die die Bellschen Ungleichungen deutlich verletzen; die Daten "rule out the whole class of realistic local theories"; 1982 lieferten diese Autoren weitere Daten, die wiederum mit den quantenmechanischen Vorhersagen übereinstimmen und damit deutlich die Bellschen Ungleichungen verletzen.

Schwabl (1990) (p. 350) schreibt bezüglich der Resultate von Aspect et al., "dass Quantenmechanik und lokale verborgene Parameter unverträglich sind. [...] Das Experiment entscheidet für die Quantenmechanik und gegen lokale verborgene Parameter." Obwohl deutlich gesagt wird, dass die experimentellen Befunde gegen *lokale* verborgene Parameter sprechen, scheinen Lehrbuchaussagen wie diese zu suggerieren, dass damit auch die postulierte Akausalität nachgewiesen worden wäre, weil die Daten "für die Quantenmechanik" sprechen, und mit der Quantenmechanik wird wiederum Akausalität assoziiert. Tatsächlich sind aber durch die Daten von Aspect et al. nur Theorien, die *lokale* verborgene Variablen postulieren, widerlegt worden. Schon Aspect et al. (1981) haben darauf hingewiesen, dass "further generalizations[47] have pointed out that determinism is not a crucial feature leading to the conflict with QM". Passon (2004) verweist auf die Tatsache, dass die von Bohm (1952) vorgeschlagene deterministische Alternative zur klassischen Quantenmechanik (s. Abschn. 3.6, Seite 75) die Verletzung der Bellschen Ungleichung ebenfalls voraussagt, und der experimentelle Nachweis der Verletzung der Bellschen Ungleichung Einschränkungen für *alle* (möglichen) Theorien impliziert, die mit den experimentellen Daten von Aspect et al. kompatibel sind. Passon liefert zunächst eine Liste von Begriffen, deren Definition in der Diskussion der Daten unklar ist:

- **Determinismus** Gemeint sei die Vorstellung, "dass alle Ereignisse nach festgelegten Gesetzen ablaufen und dass bei bekannten Natur-

[47] Gemeint sind die Arbeiten von Clausner und Horne (1974) und Bell (1972).

gesetzen und bekanntem Anfangszustand der weitere Ablauf aller Ereignisse prinzipiell vorausberechenbar ist."

- **Kausalität** "Jedes Ereignis besitzt eine vorangegangenes Ereignis als Ursache".

- **Realismus** Passon merkt an, dass es sich hierbei um ein kompliziertes philosophisches Konzept handele; für die gegebene Diskussion sei vor allem die *Unabhängigkeit* von einer möglichen Beobachtung, die von zentraler Bedeutung sei; diese Rolle könne man die "Objektivität" der Realität nennen.

- **Lokalität** Damit sei die Unabhängigkeit räumlich voneinander getrennter physikalischer Systeme gemeint, wobei der Begriff der Unabhängigkeit präzisiert werden kann und auch präzisiert werden muß. Die Unterscheidung von Signal-Lokalität und Separabilität sei für diese Präzisierung notwendig:

  - **Signal-Lokalität** Damit ist das Postulat, dass zwei raumartig[48] getrennte Ereignisse sich nicht beeinflussen können, denn kein Signal kann mit Überlichtgeschwindigkeit übermittelt werden,
  - **Separabilität** Die Forderung nach Separabilität bedeutet, dass die Zustände räumlich getrennter Objekte unabhängig voneinander definiert werden können, wobei nicht notwendig auf eine mögliche Wechselwirkung zwischen den Objekten oder Ereignissen Bezug genommen wird. "Die Forderung der Separabilität behauptet vereinfachend ausgedrückt, dass das Ganze nicht mehr als die Summe seiner Teile ist" (Passon (2004), p. 69).

Die Frage sei, so Passon (2004), welche Voraussetzungen im Bellschen Beweis und anderen Varianten dieses Beweises den Widerspruch zur Quantenmechanik implizieren. Die Annahme des Determinismus sei es *nicht*; Clausner und Horne (1974) leiteten das Bellsche Resultat her, ohne sich auf deterministische Relationen zu beziehen. Keine Herleitung der Bellschen Ungleichung kommt jedoch, so Passon (2004), ohne die Forderungen der Lokalität und Separabilität aus, – wobei sich aber die Definitionen dieser beiden Begriffe hinsichtlich ihrer formalen Umsetzung unterscheiden können (Passon (2004), p. 70). Es folgt, dass die Verletzung der Bellschen Ungleichung insgesamt auf die Nichtlokalität zurückführbar ist. Passon diskutiert Versuche, die Lokalität zu Lasten des Realismus (wie oben definiert) zu retten, fasst die Debatte aber mit der Bemerkung zusammen, dass "allen Versuchen, die 'Lokalität' der Quantenmechanik zu retten, etwas Künstliches anhaftet."

[48]Der Begriff *raumartig* kann formal definiert werden, worauf hier aber nicht eingegangen werden muß.

### 3.6 Die Bohmsche Mechanik

Die von David Bohm (1952) publizierte Arbeit liefert eine Alternative zur "klassischen" Quantenmechanik. Sie beruht wie diese auf der Schrödingergleichung und nimmt zusätzlich eine Leit- oder Bewegungsgleichung (*guidance equation*) für den Ort eines Teilchens an, – die "Objekte" dieser Theorie sind also Teilchen, deren Ort zu jedem Zeitpunkt spezifiert ist. Damit wird die *Konfiguration* der Teilchen spezifiziert. Der Ort eines Teilchens repräsentiert in der Bohmschen Mechanik eine "verborgene" Variable, bzw. korrespondiert zu einer solchen Variablen. Unter der Bedingung, dass Anfangsbedingungen definiert worden sind, sind die Bahnen der Teilchen eindeutig festgelegt. Die Bohmsche Theorie ist eine deterministische Theorie, wobei aber die statistischen Vorhersagen der Quantenmechanik exakt repliziert werden können; die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ reflektiert aber nicht die Akausalität der Prozesse, sondern mangelndes Wissen: "the randomness is arising from averaging over ignorance" (Passon, 2006). Der der von Bohr eingeführte Begriff der Komplementarität, der u.a. die Dualität von Wellen- und Partikeleigenschaft der Materie charakterisieren soll, wird in der Bohmschen Mechanik nicht benötigt; Materie wird einerseits durch eine Wellenfunktion, andererseits durch eine Größe für Partikeleigenschaften, nämlich der Position, beschrieben. Allerdings sollte z.B. ein Elektron nicht mit einem "Bohmschen Partikel" identifiziert werden, – diese sind nicht durch andere, typische Partikeleigenschaften ausgezeichnet, sondern nur durch ihre Position (Passon (2006), p. 9). Ein Bohmsches Partikel wird demnach durch das Paar $(\psi, Q_i)$ repräsentiert, und darin äußert sich eine Abkehr vom klassischen Partikelbegriff. Die Bohmsche Mechanik kann nicht als eine Version oder Erweiterung der klassischen Mechanik aufgefasst werden.

Es ist eine Reihe von Punkten, die die Bohmsche Mechanik wissenschaftstheoretisch interessant machen – etwa die Lösung des Messproblems – die aber hier nicht diskutiert werden können, ohne auf die mathematische Struktur der Begriffe und Argumente einzugehen. Passon (2004, 2006) liefert eine Einführung in diese Aspekte der Bohmschen Mechanik, einschließlich einiger Einwände gegen den Bohmschen Ansatz – und diskutiert die Frage, warum nicht jeder Physiker ein Bohm-Anhänger ist (Passon, 2005).

### 3.7 Zusammenfassung

Ausgangspunkt war die Frage, ob es "echten" Zufall gibt, ob also das Eintreten von Ereignissen ohne eine vorangehende Ursache gedacht werden kann. Wenn Wartezeiten "echt" zufällig als Resultat von Akausalität sind, so kann man folgern, dass sie exponentialverteilt sind. Sind umgekehrt die Daten mit der Hypothese kompatibel, dass sie einer Exponentialverteilung folgen, so kann man *nicht* zwingend folgern, dass die den Daten zugrundeliegenden Prozesse akausal sind.

Die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik legt, obwohl sie keine homogene Exegese darstellt, den Gedanken der Akausalität nahe. Die Tatsache, dass die Mehrzahl der Physiker sich mit der Kopenhagener Deutung anschließt, bedeutet nicht, dass diese auch "wahr" ist. Die Bohmsche Mechanik erkärt alle Daten, ohne einen solchen reinen Zufall zu postulieren, – und ohne mit dem Prinzip des Ockhamschen Rasierers zu kollidieren (vergl. Passon (2004, 2006)), das gelegentlich zur Kritik an der Bohmschen Mechanik angeführt wird, weil die Führungswelle "eigentlich" überflüssig sei. Die Tatsache, dass Beobachtungen statistisch sind, ergibt sich durch "averaging over uncertainty", die Bohmsche Mechanik selbst ist deterministisch. Eine durch die Daten induzierte Annahme von Akausalität ist, wie es scheint, beim gegenwärtigen Stand des Wissens nicht denknotwendig.

# Index