Strukturgleichungsmodelle

Skriptum[1] zur Vorlesung Statistik IV, SS 2002
FB Psyhologie und Sportwissenschaften
Westfälische Wilhelms-Universität
.

U. Mortensen
14. 07. 2002

Korrigierte Fassung 23. 07. 2012[2]

Inhaltsverzeichnis

[1]Das Skript basiert im Wesentlichen auf der Darstellung von Fahrmeir, L., Hamerle, A., Tutz, G. (1996): Multivariate Statistische Verfahren. Walter de Gruyter, Berlin, New York, (Kapitel 11), und Kaplan, D. (2000): Structural Equation Modeling. Sage Publications, Thousand Oaks, London, New Dehli; Beispiele (allerdings in abweichender Notation) findet man in Loehlin, J.C. (1998) Latent Variable Models. An Introduction to factor, path, and structural analysis. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah N.J., London

[2]Ich danke Herrn Oliver Jones für seine Hinweise auf fehlerhafte Stellen im Text.

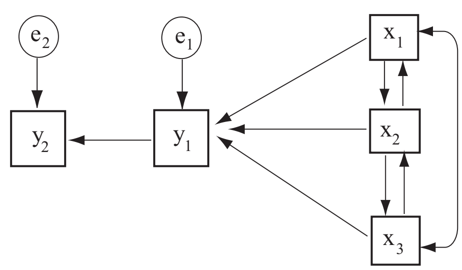
1 Einführung

Häufig sind Variablen, die psychologische Merkmale oder auf solche Größen einwirkende Variablen repräsentieren, in mehr oder weniger starkem Ausmaß voneinander abhängig. Gelegentlich wird man sogar von kausalen Beziehungen sprechen können, auch wenn mit dem Begriff der Kausalität nur mit großer Vorsicht umgegangen werden sollte. Die gängigen statistischen Verfahren zielen auf die Exploration der Abhängigkeiten, oder auf die Überprüfung von Hypothesen über die Abhängigkeiten. Bei der multiplen Regression wird die Beziehung zwischen einer abhängigen Variablen y und mehreren unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $k \geq 1$, geprüft, wobei die x_j untereinander korreliert sein können. In der Faktorenanalyse wird untersucht, ob die Korrelationen zwischen k Variablen $x_1, \ldots, x_k$ auf die "Wirkung" weniger unabhängiger Variablen zurückgeführt werden kann. Die Kanonische Korrelation verallgemeinert die multiple Regression auf den Fall von mehr als einer abhängigen Variablen.

Es liegt nun nahe, zu fragen, ob man nicht all diese Verfahren als jeweiligen Spezialfall eines allgemeineren Ansatzes auffassen kann:

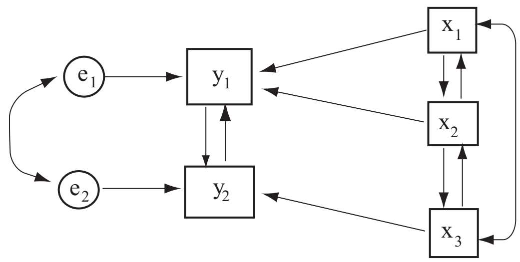
Beispiel 1 Die drei Variablen x_1, x_2, x_3 mögen Eigenschaften eines Dozenten erfassen, und die beiden Variablen y_1 und y_2 die Motivation und die Leistung der Studierenden in einem bestimmten Fach. Die Frage ist, in welcher Weise die Variablen miteinander zusammenhängen. Abbildung 1 zeigt ein erstes Modell: die Richtung der Einwirkung einer Variablen auf die andere wird dabei in einem *Pfaddiagramm* dargestellt; es sei angemerkt, daß in Abb. 1 nur Beziehungen zwischen *beobachteten* Variablen betrachtet werden, die stets in Kästchen dargestellt werden; *latente* Variable werden in Kreisen repräsentiert. Bei diesem Modell handelt es sich um ein *Rekursives Modell.* Dabei wird die abhängige Variable y_2 (Leistung) auf y_1 (Motivation) zurückgeführt, und y_1 läßt sich auf x_1 (fachliche Kompetenz), x_2 (didaktische Fähigkeit) und x_3 (soziale Interaktion) zurückführen. Es wird angenommen, daß Meßfehler nur auf y_1 und y_2 einwirken.

Abbildung 1: Strukturmodell für Motivation und Leistung I: Rekursives Modell



Denkbar ist allerdings auch das in Abbildung 2 gezeigte Modell. Dieses Modell ist *nicht-rekursiv*, denn die Leistung wird nicht nur durch die Motivation erzeugt, die wiederum durch den Dozenten generiert wird, sondern es wird angenommen, daß eine Wechselwirkung zwischen Leistung und Motivation besteht; es wird angenommen, daß im Gegensatz zu dem in Abb. 1 betrachteten Modell zwischen den auf y_1 und y_2 einwirkenden Fehlervariablen noch eine Abhängigkeit besteht (e_1 und e_2 sind korreliert). Je höher die Motivation, desto

Abbildung 2: Strukturmodell für Motivation und Leistung II: nicht-rekursives Modell



höher wird die Leistung sein, aber die Leistung wirkt auf die Motivation zurück. Bleibt zum Beispiel trotz ursprünglich hoher Motivation die Leistung gering, so kann dies zu einem Absinken der Motivation führen, das wiederum die Leistung noch weiter abfallen läßt, etc. Diese Entwicklung kann unabhängig von den Eigenschaften des Dozenten ablaufen. Überdies wird in dem in Abb. 2 dargestellten Modell angenommen, daß die fachlichen und didaktischen Kompetenzen des Dozenten nur auf die Motivation, nicht aber auf die Leistung einwirken, die soziale Interaktion aber nur auf die Leistung, nicht dagegen auf die Motivation wirkt. Die Annahmen über die Wechselwirkung von Motivation und Leistung erscheinen als sinnvoll, die speziellen Annahmen über die Wirkung des Dozenten vielleicht nicht. Der Punkt ist hier, daß man solche Modelle überhaupt aufstellen und testen kann. □

Im Beispiel wurden nur die tatsächlich gemessenenen Variablen betrachtet. Ein solcher Ansatz setzt voraus, daß man genau weiß, was die einzelnen Variablen tatsächlich messen. Aus der Faktorenanalyse ist aber bekannt, daß gemessene Variable häufig verschiedene latente Variable erfassen. Darüber hinaus ergibt sich die Frage, in welcher Weise die Meßfehler eingehen. Dementsprechend kann man sagen, daß ein Strukturmodell im Prinzip aus zwei Modellen besteht:

- **Das Strukturmodell:** in den Strukturgleichungen werden Beziehungen zwischen latenten Variablen spezifiert,
- **Das Messmodell:** dieses Modell beschreibt die Beziehungen zwischen den latenten und den gemessenen, d.h. beobachtbaren Variablen.

Die Modelle werden im folgenden Abschnitt allgemein charakterisiert.

Statt des Ausdrucks Strukturgleichungsmodell findet man auch das Acronym LISREL, für LInear Structural RELationships (Jöreskog, 1977[3] und eine Reihe späterer Veröffentlichungen).

[3]Jöreskog, K.G. (1977) Strucutral equations models in the social sciences: Specification, Estimation and Testing. In: Krishnaia, P.R. (ed.= Applications of Statistics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 265-287

2 Das Strukturmodell

2.1 Der allgemeine Ansatz

Es gebe p abhängige und q unabhängige Variablen, die als Komponenten eines Vektors aufgefaßt werden können.

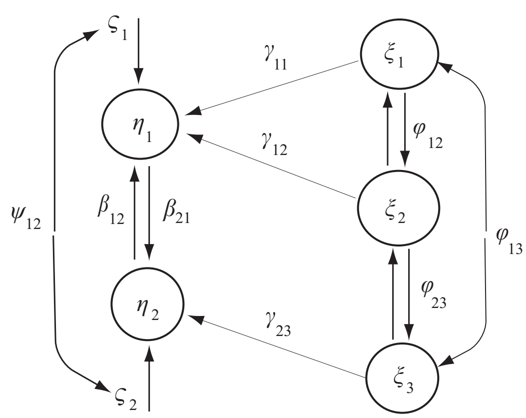
$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)', \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)'. \tag{1}$$

Die Beziehung zwischen dem Vektor η und dem Vektor ξ kann in sehr allgemeiner Form angeschrieben werden:

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta. \tag{2}$$

Hierin ist B eine $(p \times p)$-Matrix, und Γ eine $(p \times q)$-Matrix. ζ ist eine Stör- bzw. Fehlermatrix. Abb. 1 illustriert ein Pfaddiagramm für die latenten Variablen, dementsprechend werden die

Abbildung 3: Strukturmodell für Motivation und Leistung (s. Beispiele 1 und 2)



Variablen, wie oben bereits angedeutet, in Kreisen dargestellt.

Beispiel 2 (Fortsetzung von Beispiel 1) Der Vektor η korrespondiere zum Vektor $Y = (y_1, y_2)'$ und habe demnach zwei Komponenten: η_1 repräsentiere die Motivation, und η_2 repräsentiere die Leistung. Der Vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)'$ entspreche dem Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)'$. ξ_1 repräsentiere also die "wahre" fachliche Komptenz, ξ_2 die "wahre" didaktische Fähigkeit, und ξ_3 die "wahre" soziale Kompetenz. Effekte von Fehlern werden hier noch nicht angenommen. Dafür darf es aber Wechselwirkungen zwischen diesen drei Eigenschaften geben; sie werden mit φ_{ij} gekennzeichnet. Zwischen der "wahren" Leistung und der "wahren" Motivation bestehen die durch β_{ij} gekennzeichneten Wechselwirkungen. Außerdem wird angenommen, daß es Einflußfaktoren ζ_1 und ζ_2 gibt, die auf η_1 bzw. η_2 einwirken und die untereinander wechselwirken können ψ_{12}).

Es ist also $p = 2$ und $q = 3$; ausgeschrieben ergibt sich für (2)

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Betrachtet man den ersten Teil, $B\eta$, so erhält man ausmultipliziert

$$B\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \eta_1 + \beta_{12}\eta_2 \\ \beta_{21}\eta_1 + 0 \cdot \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{12}\eta_2 \\ \beta_{21}\eta_1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

d.h.

$$\eta_1 = \beta_{12}\eta_2, \quad \eta_2 = \beta_{21}\eta_1. \tag{5}$$

Durch die Matrix B wird also eine Wechselwirkung zwischen den Komponenten des Vektors η beschrieben. Dies erklärt auch, warum die Diagonalzellen in B gleich Null sind; wären sie ungleich Null, würden die Komponenten noch einmal auf sich selbst bezogen, was nicht viel Sinn macht. Der Ausdruck $B\eta$ beschreibt gewissermassen eine Feedback-Schleife zwischen den Komponenten des abhängigen Vektors.

Der zweite Teil der Gleichung (2) beschreibt die Wirkung der unabhängigen Variablen ξ auf η. Demnach wirkt ξ (der oder die Dozent(in)) in der Form $\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2$ auf η_1 und in der Form $\gamma_{23}\xi_3$ auf η_2. Die Größen ζ_1 und ζ_2 indizieren Störungen und Fehler.

Es müssen noch die Größen φ_{ij} und ψ_{ij} betrachtet werden; sie werden in den Matrizen Φ und Ψ zusammengefasst:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

φ_{ij} gibt die Interaktionen zwischen den ξ_i und ξ_j an, und ψ_{ij} gibt die Interaktionen zwischen den ζ_i und ζ_j an. □

In Abbilung 4 wird eine komplette Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Dozenten- und den Studierendenvariablen gegeben, wobei jetzt noch $\gamma_{22} \neq 0$ sein darf.

2.2 Das reduzierte Modell und die Beziehung zur multiplen Regression

Die Gleichung (2), d.h.

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta.,$$

kann unter Umständen vereinfacht werden. Zunächst einmal folgt sofort

$$\eta - B\eta = \Gamma\xi + \zeta = (I - B)\eta.$$

Falls die zu $(I - B)$ inverse Matrix $(I - B)^{-1}$ existiert, erhält man daraus

$$\eta = (I - B)^{-1}\Gamma\xi + (I - B)^{-1}\zeta. \tag{7}$$

Dies ist die *reduzierte Form* der Strukturgleichungen. Setzt man

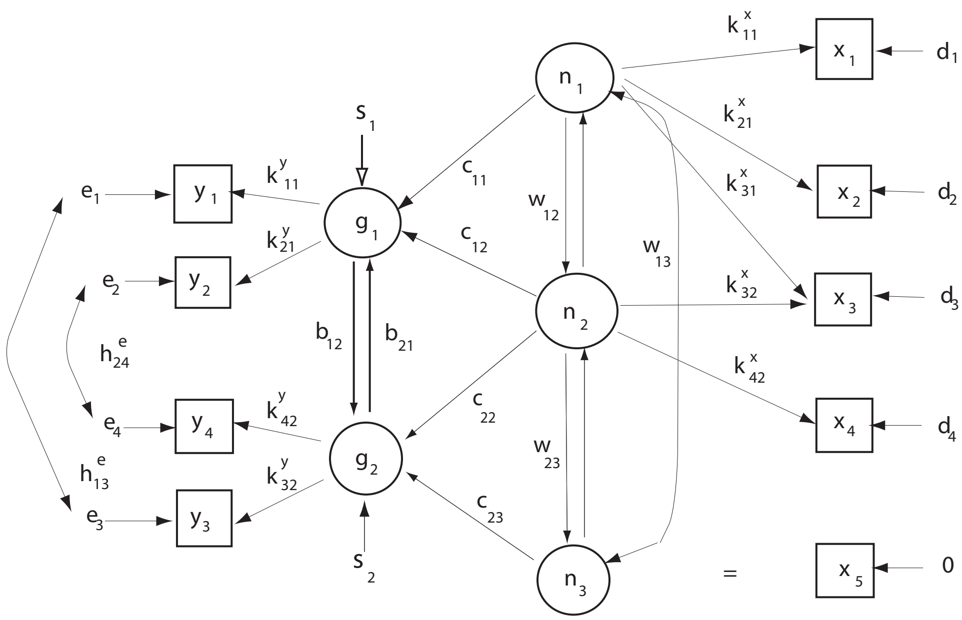
$$\Pi_1 = (I - B)^{-1}\Gamma, \quad \zeta^* = (I - B)^{-1}\zeta, \tag{8}$$

so erhält man die Gleichung

$$\eta = \Pi_1\xi + \zeta^*, \tag{9}$$

so daß η durch eine Regressionsgleichung "vorhergesagt" wird.

Abbildung 4: Strukturmodell für Motivation und Leistung (s. Beispiele 1 und 2)



3 Das Messmodell

Die Vektoren η, ξ, ζ sind nicht beobachtbar, sondern *latent*. Ihnen entsprechen aber die Messungen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)'$ für η, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)'$ für ξ. Die Vektoren x und y heißen die *manifesten* Variablen. Es wird angenommen, daß zwischen den latenten und den manifesten Variablen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$x = \mu_x + \Lambda_x \xi + \delta, \tag{10}$$

$$y = \mu_y + \Lambda_y \eta + \epsilon. \tag{11}$$

wobei $\mu_y = E(y)$, $\mu_x = E(x)$ ist. $\Lambda_y = (\lambda_{ij}^y)$ ist eine $(p \times r)$-Matrix, deren Elemente λ_{ij}^y die Regressionsparameter der Regression der manifesten Variablen y auf die latenten Variablen η sind. Analog dazu ist $\Lambda_x = (\lambda_{ij}^x)$ eine $(q \times s)$-Matrix der Regressionskoeffizienten für die Regression von x auf die latenten Variablen ξ. $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)'$ und $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_q)'$ sind die Vektoren der Messfehler ("Messfehler in den Variablen"). Die Gleichungen (11) und (10) können zu einer Matrixgleichung zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_x & 0 \\ 0 & \Lambda_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Die Regression von beobachteten, d.h. manifesten Variablen auf nicht beobachtbare, latente Variablen entspricht dem faktorenanalytischen Ansatz, und deshalb repräsentieren die Gleichungen (11) und (10) den allgemeinen faktorenanalytischen Ansatz. In der Faktorenanalyse geht man oft von standardisierten Variablen aus, während hier nicht standardisierte

Variablen x und y betrachtet werden. Man kann natürlich die Gleichungen in solche für standardisierte überführen, indem man man zu den Gleichungen

$$(x - \mu_x)/\sigma_x = \Lambda_x \xi/\sigma_x + \delta/\sigma_x \tag{13}$$

$$(y - \mu_y)/\sigma_y = \Lambda_y \eta/\sigma_y + \epsilon/\sigma_y \tag{14}$$

übergeht. ϵ bzw. ϵ/σ_y enthält dann die Effekte von spezifischen Faktoren und Störgrössen. in jedem Fall können die Matrizen Λ_y und Λ_x als Matrizen der Ladungen der Variablen y und x auf den latenten Variablen η bzw. ξ sind. Dabei wird angenommen, daß die y nicht auf den ξ und die x nicht auf den η laden. Es sollen die folgenden Beziehung gelten:

$$E(\epsilon) = E(\delta) = 0, \tag{15}$$

und

$$\begin{aligned}
Kov(\epsilon, \eta) &= E(\epsilon\eta') = 0 && (16)\\
Kov(\delta, \xi) &= E(\delta\xi') = 0 && (17)\\
Kov(\epsilon, \xi) &= E(\epsilon\xi') = 0 && (18)\\
Kov(\delta, \eta) &= E(\delta\eta') = 0 && (19)\\
Kov(\epsilon, \delta) &= E(\epsilon\delta') = 0 && (20)\\
Kov(\epsilon, \zeta) &= E(\epsilon\zeta') = 0 && (21)\\
Kov(\delta, \zeta) &= E(\delta\zeta') = 0 && (22)\\
Kov(\epsilon) &= E(\epsilon\epsilon') = \Theta_\epsilon = (\theta_{ij}^\epsilon) && (23)\\
Kov(\delta) &= E(\delta\delta') = \Theta_\delta = (\theta_{ij}^\delta). && (24)
\end{aligned}$$

Die einzigen von Null verschiedenen Korrelationen sind demnach die zwischen den Messfehlern ϵ und δ.

4 Schätzung der Modellparameter

4.1 Die allgemeine Varianz-Kovarianz-Matrix

Die Vektoren x und y können zu einem Gesamtvektore $z = (x', y')'$ zusammengefaßt werden. Dann läßt sich die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ für die Komponenten des Vektors z aufstellen:

$$\Sigma = Kov((x', y')') = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Σ ist eine aus Matrizen zusammengesetzte Matrix: Σ_{xx} ist die Matrix der Varianzen und Kovarianzen für die Komponenten des Vektors x, Σ_{xy} enthält die Varianzen und Kovarianzen zwischen den Komponenten der Vektoren x und y, etc. Die Submatrizen Σ_{xx} etc ergeben sich aus den Grundgleichungen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{xx} &= E[(x - \mu_x)(x - \mu_x)'] = E[(\Lambda_x\xi + \delta)(\Lambda_x\xi + \delta)'] = \\
&= E[(\Lambda_x\xi\xi'\Lambda_x') + E[\Lambda_x\xi\delta'] + E[\delta\xi'\Lambda_x'] + E[\delta] = \\
&= \Lambda_x E(\xi\xi')\Lambda_x' + 0 + 0 + E(\delta\delta') = \\
&= \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\delta. && (26)
\end{aligned}$$

Hierin ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1p} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{2p} \\ & & & \vdots & \\ \varphi_{p1} & \varphi_{p2} & \varphi_{p3} & \cdots & \varphi_{pp} \end{pmatrix} \tag{27}$$

die Matrix der Wechselwirkungskoeffizienten zwischen den latenten Variablen ξ. Auf analoge Weise findet man

$$\begin{aligned} \Sigma_{xy} &= C_y(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)C_y' + \Theta_\epsilon && (28) \\ \Sigma_{xy} &= \Lambda_x\Phi\Gamma' C_y' && (29) \\ \Sigma_{yx} &= C_y\Gamma\Phi\Lambda_x', && (30) \end{aligned}$$

wobei

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \cdots & \psi_{1q} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \cdots & \psi_{2q} \\ & & & \vdots & \\ \psi_{q1} & \psi_{q2} & \psi_{q3} & \cdots & \psi_{qq} \end{pmatrix} \tag{31}$$

die Matrix der Wechselwirkungen zwischen den Komponenten von ζ ist, und $C_y = \Lambda_y(I - B)^{-1}$. Mit diesen Spezifikationen von Σ_{xx} bis Σ_{yy} ist (25) die *Grundgleichung* des Strukturgleichungsmodells. Über diese Grundgleichung werden die Varianzen und Kovarianzen der bzw. zwischen den beobachteten Variablen und den Matrizen B, γ, Λ_x, Λ_y, Φ, Ψ, Θ_ϵ und Θ_δ dargestellt. Man kann nun alle Elemente dieser Matrizen, das sind die Parameter des Modells, in einem Vektor Θ zusammenfassen und die Abhängigkeit von Σ von diesen Parametern in der Form $\Sigma(\Theta)$ ausdrücken. Für die Parameter gelten die folgenden Spezifikationen:

1. *Fixierte Parameter*: Dies sind Parameter, deren Wert man vorgibt. Bei dieser Vorgabe greift man auf Theorien oder Hypothesen über die Beziehung zwischen Variablen zurück.

2. *Restringierte Parameter*: Die Werte solcher Parameter sind unbekannt, aber sind gleich einem oder mehreren anderen Parametern.

3. *Freie Parameter*: die Werte dieser Parameter sind ebenfalls unbekannt, aber sie werden frei, d.h. ohne Rückgriff auf bestimmte Annahmen über ihren Wert geschätzt.

Die Gesamtzahl der *unabhängigen Parameter* setzt sich zusammen aus der Anzahl der freien Parameter plus der Anzahl der restringierten Parameter.

4.2 Die Identifikation eines Strukturgleichungsmodells

Das Modell wird, nach Maßgabe der betrachteten Hypothesen, durch ein Pfadmodell angegeben. Von den latenten Variablen wird angenommen, daß sie auf Intervallskalen gemessen werden können. Dazu muß der Nullpunkt und die Maßeinheit festgelegt werden. Durch die Annahme

$$E(\eta) = E(\xi) = 0 \tag{32}$$

wird der Nullpunkt der Skalen festgelegt. Nimmt man weiter an, daß die Variablen standardisiert sind, legt man die Maßeinheit fest; die Annahme bedeutet

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \cdots = \varphi_{ss} = 1. \tag{33}$$

Dies gilt allerdings nicht für die η-Variablen, da die entsprechende Matrix bei der Modellspezifikation erscheint. Man knn aber die Maßeinheit spezifizieren, indem man sie gleich der Maßeinheit einer der beobachtbaren Variablen setzt. Dazu wird eine der Ladungen in Λ_x und eine der Ladungen in Λ_y gleich 1 gesetzt. Dementsprechend hat man etwa

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 1 & \varphi_{23} \\ \varphi_{21} & \varphi_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_{21}^y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{42}^y \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Damit haben die latenten Variablen die gleichen Maßeinheiten wie die manifesten Variablen y_1 bzw. y_3.

Ein Modell gilt als *identifizierbar*, wenn die Parameter in Θ eindeutig durch die Elemente von Σ ausgedrückt werden können.

Es gibt insgesamt

$$s = p + q \tag{35}$$

Variablen, p ”endogene” und q ”exogene” Variable. Es gibt

$$\binom{s}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Kovarianzen (verschiedene Paare) in Σ, plus s Varianzen, so daß man insgesamt maximal

$$\binom{s}{2} + s = \frac{n(n-1)}{2} + s = \frac{s(s+1)}{2} \tag{36}$$

Parameter zu schätzen hat. Durch die Wahl eines bestimmten Modells reduziert sich aber die Anzahl der schätzenden Parameter. Es sei t die Anzahl der zu schätzenden Parameter. Das Modell heißt *identifizierbar*, wenn

$$t \leq \frac{s(s+1)}{2} \quad \text{(”identifizerbar”)} \tag{37}$$

gilt. Gilt insbesondere

$$t < \frac{s(s+1)}{2} \quad \text{(”überidentifiziert”)} \tag{38}$$

so ist das Modell *überidentifiziert*. Gilt

$$t > \frac{s(s+1)}{2} \quad \text{(”nicht identifizierbar”)} \tag{39}$$

so gilt das Modell als *nicht identifizierbar*.

Die Gleichungen (37) bis (39) definieren die *Zählregel* (counting rule) zur Bestimmung der zu schätzenden Parameter.

4.3 Die Schätzung der Parameter

Die Parameter des Modells sind (i) die Varianzen und Kovarianzen der exogenen Variablen in Φ, (ii) die Varianzen und Kovarianzen des "Störungs"terms, d.h. die Elemente von Ψ, und (iii) die Regressionsparameter in B und Γ. Die geschätzten Parameter werden im Vektor $\hat{\Theta}$ zusammengefasst; $\hat{\sigma}(\hat{\Theta})$) ist dann die geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix. Mit S wird die Matrix der aus denDaten errechneten Varianzen und Kovarianzen bezeichnet. Der Fit des Modells ist um so besser, je weniger S und $\hat{\Sigma}$ voneinander abweichen. Das Maß der Abweichung wird durch eine *Diskrepanzfunktion* $F(S, \hat{\Sigma})$ repräsentiert. Es soll gelten

1. $F(S, \hat{\Sigma}) \geq 0$,
2. $F(S, \hat{\Sigma}) = 0$ genau dann, wenn $S = \hat{\Sigma}$,
3. $F(S, \hat{\Sigma})$ ist stetig in S und $\hat{\Sigma}$.

Die Parameter werden entweder nach der *Maximum-Likelihood-Methode* oder nach der Methode der Verallgemeinerten Kleinsten Quadrate (GLS = Generalised Least Squares) geschätzt. In beiden Methoden wird vorausgesetzt, daß die Komponenten des Vektors $z = (x', y')'$ multivariat normalverteilt sind, d.h. es soll gelten

$$f(z) = (2\pi)^{-(p+q)/2}|\Sigma|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}z'\Sigma^{-1}z\right). \tag{40}$$

Im 2-dimensionalen Fall hat man insbesondere

$$\Sigma = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

d.h. man kann die Korrelationen zwischen den Variablen in Σ anschreiben. Im Prinzip ist es möglich, auch nur die Kovarianzen zu betrachten (dies macht nur dann wirklich Sinn, wenn alle Komponenten von $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ in der gleichen Maßeinheit gemessen werden). Mit $|\Sigma|$ wird die Determinante von Σ bezeichnet. Im 2-dimensionalen Fall hat man

$$|\Sigma| = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = 1 - r_{12}^2 = 1 - r^2, \quad r = r_{12}, \tag{42}$$

denn es ist ja $r_{12} = r_{21}$. Also ist $|\Sigma|^{1/2} = \sqrt{1 - r_{12}}$. Weiter ist $p + q = 2$, mithin ist $(p + q)/2 = 1$. Weiter muß die zu Σ inverse Matrix Σ^{-1} gefunden werden. Man findet[4] mit $r = r_{12}$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(1-r^2) & -r/(1-r^2) \\ -r/(1-r^2) & 1/(1-r^2) \end{pmatrix}. \tag{43}$$

(Man überprüfe, ob tatsächlich $\Sigma\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1}\Sigma = I$ gilt, I die Einheitsmatrix). z ist ein Vektor, $z = (z_1, z_2)'$, wobei $z_i = (x_i - \mu_i)/\sigma_i$. Setzt man all dies in (40) ein, so ergibt sich für den Spezialfall $n = 2$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}(z_1^2 + z_2^2 - 2r_{12}z_1z_2)\right). \tag{44}$$

[4] Wie, wird nicht verraten.

Maximum-Likelihood: Es ist $\Sigma = \Sigma(\Theta)$. Die Likelihood für einen bestimmten Parametervektor Θ ist

$$L(\Theta) = (2\pi)^{-N(p+q)/2}|\Sigma(\Theta)|^{-N/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} z_i'\Sigma^{-1}(\Theta)z_i\right). \tag{45}$$

Θ wird so gewählt, daß $L(\Theta)$ maximal wird. Der Logarithmus ist eine monotone Funktion des Arguments (d.h. $\log x$ wächst monoton mit x). Deshalb kann man auch ebensogut $\log L(\Theta)$ betrachten; für denjenigen Vektor Θ, für den $L(\Theta)$ maximal wird, wird auch $\log L(\Theta)$ maximal. Der Faktor $(2\pi)^{-N(p+q)/2}$ ist dabei unabhängig von Θ, kann also vernachlässigt werden. Zu betrachten ist dann

$$\log L(\Theta) = -\frac{N}{2}[\log|\Sigma(\Theta)| + sp[S\Sigma^{-1}(\Theta)]. \tag{46}$$

Die minimale Diskrepanzfunktion für den optimalen Parametervektor ist

$$F_{ML} = \log|\Sigma(\Theta)| + sp[S\sigma^{-1}(\Theta)] - \log|S| - t. \tag{47}$$

Dabei steht *sp* für "Spur", d.h. für die Summe der Diagonalelemente, und $|\Sigma(\Theta)|$ und $|S|$ sind die Determinanten von $|\Sigma(\Theta)|$ und $|S|$.

GLS: Hier ist die Diskrepanzfunktion durch

$$F_{GLS} = [S - \Sigma(\Theta)('W^{-1}(S - \Sigma(\Theta)] \tag{48}$$

gegeben. Dabei ist W^{-1} eine Matrix mit Gewichten, mit denen die Abweichungen $S - \sigma(\Theta)$ durch ihre Varianzen und Kovarianzen mit anderen Elementen der Matrix gewichtet werden. Insbesondere kann $W = S$ gewählt werden; die Diskrepanzfunktion nimmt dann die Form

$$F_{GLS} = \frac{1}{2}sp(I - S^{-1}\Sigma)^2 \tag{49}$$

an. Gilt die multivariate Normalverteilung der beobachteten Variablen, so hat die GLS-Schätzung die gleichen asymptotischen Eigenschaften wie die ML-Schätzung, d.h. u.a. daß die Schätzungen asymptotisch normal sind.

5 Tests eines Modells und der Parameter

Die Gleichung (46) ist die log-Likelihood $\log L_0$ für die Nullhypothese, daß das betrachtete Modell mit den Daten Kompatibel ist. Die alternative Hypothese ist, daß Σ *irgendeine* positiv definite Matrix ist. Unter dieser Hypothese nimmt die log-Likelihood $\log L_a$ ein Maximum an, wenn S als Schätzer für Σ eingesetzt wird. Es gilt

$$\begin{aligned}
\log L_a &= -\frac{N}{2}\log|S| + sp(SS^{-1}) \\
&= -\frac{N}{2}\log|S| + +sp(I) \\
&= -\frac{N}{2}\log|S| + t. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Als Test wird der Likelihood Ratio Test (LR) gewählt:

$$\begin{aligned} -2\log\frac{L_0}{L_a} &= -2\log L_0 + s\log L_a \\ &= N[\log|\Sigma| + sp(\Sigma^{-1}S)] - n(\log|S| + t) \\ &= N[\log|\Sigma| + sp(\Sigma^{-1}S) - \log|S| - t]. \end{aligned} \tag{51}$$

Die Gleichung (51) besagt, daß der LR-Wert gerade gleich nF_{ML} ist. Der LR-Test strebt asymptotisch gegen einen ξ^2-verteilten Wert, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade gleich der Anzahl der nicht-redundanten Werte in Σ minus der Anzahl der freien Parameter des Modells ist. Ist der χ^2-Wert signifikant, so ist das Modell nicht mit den Daten kompatibel. Für den mangelnden Fit sind viele Gründe möglich: zunächst kann einfach das Modell falsch sein, oder aber die Daten sind nicht normalverteilt, oder es gibt fehlende Daten, etc.

6 Die Faktorenanalyse

6.1 Allgemeine Vorbemerkung

In (12), Seite 6, wurde das allgemeine Messmodell

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_x & 0 \\ 0 & \Lambda_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon \end{pmatrix}.$$

vorgestellt. Für die Variablen x erhält man

$$x - \mu_x = \Lambda_x \xi + \delta, \tag{52}$$

und für y resultiert

$$y - \mu_y = \Lambda_y \eta + \epsilon. \tag{53}$$

Schreibt man wieder x für $x - \mu_x$, so erhält man

$$x = \Lambda_x \xi + \delta. \tag{54}$$

Λ_x kann als Matrix von Faktorladungen aufgefaßt werden, ξ ist ein Vektor von r "common factors" (gemeinsamen Faktoren), und δ ist ein Vektor von spezifischen Faktoren plus Fehlern; für $y - \mu_y$ gelten analoge Betrachtungen.

Die Gleichung (54) beschreibt ein *faktorenanalytisches Modell.* x ist ein q-dimensionaler Vektor mit beobachteten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_q$; schreibt man die Messwerte $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iq}$ für die $i = 1, 2, \ldots, m$ Personen als Reihen untereinander an, so entsteht die Matrix X der Messwerte. Man beschränkt sich im Folgenden auf die in (54) verwendete Vektorschreibweise, weil sie zu übersichtlicheren Formeln führt; die Komponenten x_j von x werden dabei als zufällige Variablen betrachtet, die bei einer Messung, z.B. bei der i-ten Person, dann einen bestimmten Wert annimmt.

ξ ist ein Vektor von latenten Variablen; die Interpretation der Komponenten von ξ ist analog zu der der Komponenten von x. Die Komponenten von ξ werden nun als *Common Factors*, also als *Gemeinsame Faktoren* angesehen, also als Faktoren, die in alle Messungen x eingehen. Λ_x ist eine $q \times k$-Matrix von Regressionsgewichten, die den *Ladungen* der k latenten

Variablen entsprechen. δ ist ein q-dimensionaler Vektor, dessen Komponenten *spezifische Variablen* plus Messfehler repräsentiert. Man macht die folgenden

Annahmen:

$$E(\xi) = 0, \quad E(\delta) = 0, \quad Kov(\xi, \delta) = 0. \tag{55}$$

Die Erwartungswerte von ξ und δ sollen gleich Null sein (dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit!), und die Korrelation zwischen allgemeinen und spezifischen Faktoren bzw. Fehlern soll gleich Null sein.

Spezialfall: Das Modell (54) ist nun ein Spezialfall des allgemeinen Strukturmodells, wobei der Parametervektor Θ nun die Parameter von Λ_x, Φ und Θ_δ enthält, d.h. $\Theta = (\Lambda_x, \Phi, \Theta_\delta)$. In anderen Worten, man kann spezifische Hypothesen über die Faktorenstruktur formulieren und testen.

Anmerkung: die spezifischen Variablen δ: Die Gleichung (54) kann man in bezug auf das testtheoretishe Modell der "wahren Scores" beziehen. Demnach setzt sich ein Testwert aus einem wahren Wert ud einem Messfehler zusammen, d.h. es wird angenommen, daß

$$x = t + e \tag{56}$$

gilt, wobei jetzt t für den "true" Score steht, und e für den Fehler ("error"). Man kann nun annehmen, daß das Faktormodell (54), das für die beobachteten Daten (d.h. Scores) gilt, auch für die wahren Scores gilt. Dementsprechend kann man

$$t = \Lambda_x \xi + s \tag{57}$$

ansetzen, wobei s ein Vektor ist, der die spezifischen Varianzen in den t-Werten enthält, die auf die spezifischen Auswahl von Variablen zrückgehen. Setzt man (57) in (56) ein, so erhält man

$$x = \Lambda_x \xi + s + e. \tag{58}$$

Demnach ist $\delta = s + e$. δ setzt sich aus spezifischen Termen s und reinen Fehlertermen e zusammen. Die Annahme, daß δ nur "Fehler" enthält, bedeutet, daß man die s-Anteile für vernachlässigbar hält.

6.2 Die Faktorenanalyse als Spezialfall eines Strukturgleichungsmodells

Man muß sich natürlich nicht auf den Vektor x oder auf den Vektor y beschränken, sondern kann den Vektor $(x, y)'$ betrachten; die Unterscheidung von x- und y-Werten ist ja willkürlich. Das allgemeine Messmodell bezieht sich auf das allgemeine Strukturgleichungsmodell

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta.$$

Wie man auch den Abbildungen 3 und 4 entnehmen kann, spezifizieren die Matrizen B und Γ Beziehungen zwischen den latenten Variablen ξ und Γ. Setzt man also $B = \Gamma = 0$, so behauptet man damit, daß diese Beziehungen nicht existieren; man erhält den Spezialfall

$$\eta = \zeta. \tag{59}$$

Das Messmodell

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_y & 0 \\ 0 & \Lambda_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon \\ \delta \end{pmatrix}.$$

gilt natürlich nach wie vor, die Gleichungen, nur werden eben keine Beziehungen zwischen den latenten Variablen ξ und η postuliert. Das faktorenanalytische Modell ist deshalb "einfach" ein Spezialfall des allgemeinen Strukturgleichungsmodells. Die die Varianz-Kovarianz-Matrix der Daten kann in der Form

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Lambda_x E(\xi\xi')\Lambda_x' + E(\delta\delta') \\ &= \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\delta \end{aligned} \tag{60}$$

geschrieben werden. Hierin ist Φ die Matrix der Faktorvarianzen und Kovarianzen, und Θ_δ ist die Diagonalmatrix der Varianzen der spezifischen Faktoren/Fehlern.

6.3 Identifikation und Rotation im nicht restringierten Modell

Der Begriff der Identifikation bezieht sich auf die Frage, ob die Parameter des Modells eindeutig bestimmt werden können. Es sei T eine orthogonale $(r \times r)$-Matrix, r die Anzahl der latenten Faktoren. Es gilt also $TT' = TT^{-1} = I$ die Einheitsmatrix. Es sei nun $\Lambda^* = \Lambda T$ und $\phi^* = T^{-1}\Phi T'^{-1}$, und $\Theta^* = \Theta$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Sigma^* &= \Lambda^*\phi^*\Lambda^{*'} + \Theta^* \\ &= \Lambda T T' \phi T'^{-1} T' \Lambda' + \Theta \\ &= \Lambda\phi\Lambda' + \Theta \\ &= \Sigma. \end{aligned} \tag{61}$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß eine orthogonale Transformation der Faktoren die gleiche Kovarianzmatrix erzeugt. Dementsprechend heißt das Modell *nicht identifizierbar*; es gibt $r \times r = r^2$ Unbestimmtheiten, die beseitigt werden müssen, will man ein identifizierbares Modell haben.

Es werde nun $\Phi = I$ gesetzt, I die Einheitsmatrix; dies bedeutet, daß die latenten Variablen unkorreliert sein sollen, d.h. sie sollen orthogonal sein. Ist nun $r = 1$, so wird $r^2 = 1$ Unbestimmtheit beseitigt, und es folgt, daß keine orthogonale Transformation (= Rotation) möglich ist. Es sei $r = 2$. Dann ist $r^2 = 4$, und $r(r+1)/2 = 3$ Unbestimmtheiten werden beseitigt, d.h. es bleiben noch $r^2 - r(r+1)/2 = 1$ Unbestimmtheiten. Für allgemein $r \geq 3$ bleiben $r^2 - r(r+1)/2 = r(r-1)/2$ Unbestimmtheiten.

Setzt man also $\Phi = I$, so werden nur im Falle $r = 1$ alle Unbestimmtheiten beseitigt. für den allgemeinen Fall $r > 1$ bleiben $r(r-1)/2$ Unbestimmtheiten, die man beseitigt, indem man Annahmen über Elemente in Λ_x macht.

Um zu sehen, wie die Beseitigung der Unbestimmtheiten vor sich geht, werde der Fall $r = 2$ betrachtet. Nach den vorangegangenen Betrachtungen hat man dann noch $r(r-1)/2 = 2 \cdot 1/2 = 1$ Freiheitsgrade, die die Unbestimmtheit ausmachen, d.h. durch Wahl eines Parameters wird die Lösung eindeutig festgelegt. Durch Wahl einer Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{62}$$

kann Λ_x in $\Lambda_x^* = \Lambda_x T$ überführt werden. T wird durch einen Parameter, den Rotationswinkel θ, bestimmt. Durch Wahl genau eines bestimmten Wertes für θ wird die Lösung festgelegt.

Im allgemeinen Fall kann die Unbestimtheit dann durch die Wahl von $r(r-1)/2$ Rotationswinkeln beseitigt werden.

Die Wahl von $\Phi = I$, d.h. die Entscheidung, sich auf orhtogonale Faktoren zu konzentrieren, ist nur eine von mehreren möglichen. Man kann auch die Möglichkeit korrelierter, d.h. *obliquer* Faktoren in Betracht ziehen. Dazu erlaubt man, daß einige der Elemente von Φ, die nicht in der Diagonbalen von Φ liegen, ungleich Null sind. Man geht wie folgt vor:

1. Man geht von einer orthogonalen Rotation aus, z.B. nach dem Varimax-Kriterium; diese Rotation liefere $\Lambda^{(1)}$.

2. Man wählt eine bestimmte Matrix $\Phi = \Phi^{(2)}$ derart, daß $\Phi^{(2)}$ Einsen in der Diagonale hat und zumindest einige der übrigen Elemente ungleich Null sind. Damit erhält man korrelierte Faktoren.

3. Es gibt eine Reihe von Methoden, zu obliquen Faktoren zu kommen, vergl. Mulaik (1972)[5]; auf sie kann hier nicht im einzelnen eingegangen werden.

6.4 Parameterschätzung: exploratorischer und konfirmatorischer Ansatz

Hat man das Modell festgelegt, müssen die entsprechenden Parameter des Modells geschätzt werden. Kann die multivariate Normalverteilung angenommen werden, kann man die Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung der Parameter verwenden. Die geschätzten Parameter sind dann asymptotisch normalverteilt, so daß eine Möglichkeit existiert, die Hypothese (das Modell) zu testen. Die Methode setzt voraus, daß die Matrix $\Lambda'\Theta^{-1}\Lambda$ diagonal ist; dies bedeutet, daß $r(r-1)/2$ Restriktionen für die Parameter gesetzt werden müssen. im *exploratorischen* Ansatz werden keine weiteren Restriktionen gesetzt, und die Anzahl der freien Parameter, die geschätzt werden müssen, ist dann

$$df = ((q-r)^2 - (q+r))/2. \tag{63}$$

Die Lösung kann dann noch rotiert werden, um eine bessere Interpretierbarkeit zu erreichen.

Beim *konfirmatorischen* Ansatz werden mehr als r^2 Restriktionen gesetzt. Man legt z.B. bestimmte Richtungen der Faktoren fest. Die Details werden hier übergangen; man muß z.B. Festlegungen bezüglich der Metrik (Wahl der Skaleneinheiten) machen. Der Test geht dann im Übrigen wie ein Test in allgemeinen Strukturgleichungsmodellen vonstatten.

7 Beispiele

Beispiel 3 McIver, Carmines & Zeller (1980)[6] untersuchten die Einstellung zur Polizei. Dazu wurden 11 000 Telephoninterviews mit Bewohnern von insgesamt 60 Gemeinden in

[5]Mulaik, S. (1972) The foundations of factor analysis. New York. McGraw-Hill

[6]McIver, J.P., Carmines, E.G., Zeller, R.A. (1980) Multiple indicators. Appendix in Zeller, R.A., Carmines, E.G., Measurement in the Social Sciences, p. 162-185; Cambridge University Press

Tabelle 1: Korrelationen zwischen Items zur Einstellung zur Polizei

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Police Service	1.00	.50	.41	.33	.28	.30	-.24	-.23	-.20
2. Responsiveness	.48	1.00	.35	.29	.26	.27	-.19	-.19	-.16
3. Response time	.42	.37	1.00	.30	.27	.29	-.17	-.16	-.14
4. Honesty	.34	.30	.26	1.00	.52	.48	-.13	-.11	-.15
5. Courtesy	.31	.28	.24	.51	1.00	.44	-.11	-.09	-.10
6. Equal trreatment	.29	.26	.23	.49	.44	1.00	-.15	-.13	-.13
7. Burglary	-.24	-.21	-.18	-.14	-.13	-.12	1.00	.58	.47
8. Vandalism	-.22	-.19	-.17	-.13	-.12	-.11	.58	1.00	.42
9. Robbery	-.18	-.16	-.14	-.11	-.10	-.09	.47	.43	1.00

drei "metropolitan areas", also Einzugsbereichen größerer Städte, geführt. U.a. wurden 6 Items zur Einstellung zur Polizei und 3 Items zur Wahrscheinlichkeit, Opfer von Einbruch, Vandalismus und Raub zu werden erhoben. Die Korrelationen zwischen den Items finden sich in der Tabelle 1, wobei im oberen Dreieck die tatsächlichen (d.h. empirischen) Korrelationen stehen, und im unteren die aus dem faktorenanalytischen Modell zurückgegerechneten: Die Inspektion der Tabelle zeigt, daß die ersten 6 Items, die sich auf die Einstellung zur Polizei beziehen, positiv miteinander korrelieren, ebenso die Einstellungen zu den einzelnen Verbrechen. Die Korrelationen zwischen Polizei- und Verbrechensitems sind dagegen negativ. Man kann vermuten, daß es drei, möglicherweise korrelierte Faktoren (latente Variablen) gibt, durch die sich die Korrelationen zwischen den Items "erklären" lassen. In der Tat ergibt sich die folgenden Tabellen der Faktorenladungen bzw. der Faktorinterkorrelationen: Die Güte

Tabelle 2: Faktorenladungen

	Faktorenladungen			Kommunalität
Item	F_1	F_2	F_3	h^2
1. Police service	.74	.00	.00	.55
2. Responsiveness	.65	.00	.00	.43
3. Response time	.56	.00	.00	.32
4. Honesty	.00	.75	.00	.56
5. Courtesy	.00	.68	.00	.46
6. Equal treatment	.00	.65	.00	.42
7. Burglary	.00	.00	.80	.63
8. Vandalism	.00	.00	.72	.52
9. Robbery	.00	.00	.59	.35

des Fits kann man aus der Tabelle 1 ersehen: die größte Abweichung zwischen beobachteten und rückgerechneten Korrelationen beträgt .06, und im allgemeinen beträgt die Abweichung weniger als .02. Das Modell wird in Abb. 5 dargestellt. □

Beispiel 4 Zwei psychometrische Tests heissen *parallel*, wenn sie die gleichen latenten Variablen (common factors) in gleichem Ausmaß messen, und wenn jeder der beiden Tests die

Tabelle 3: Korrelationen zwischen Faktoren

	F_1	F_2	F_3
F_1	1.00	.62	-.41
F_2		1.00	-.24
F_3			1.00

Abbildung 5: Faktorenanalyse: Einstellung zur Polizei (McIver, Carmines & Zeller, 1980)

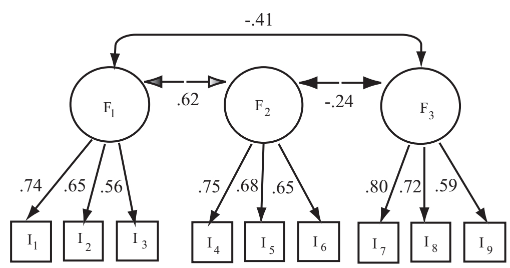
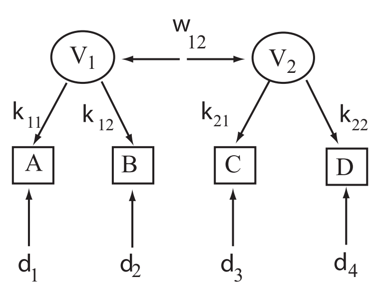


Abbildung 6: Parallele Tests, I



gleiche spezifische Varianz hat. In Abb. 6 wird dieser Sachverhalt dargestellt: V bezeichnet die Menge der gemeinsamen Faktoren. Es muß (i) $\lambda_1 = \lambda_2$, und (ii) $Var(e_1) = Var(e_2)$ gelten, damit die beiden Tests T_1 und T_2 parallel sind.

Die beiden Tests T_1 und T_2 heißen *kongenerisch*, wenn sie zwar die gleichen gemeinsamen Variablen V messen, aber nicht in gleichem Ausmaß; es ist also $\lambda_1 \neq \lambda_2$ erlaubt. Sie heißen τ-*generisch*, wenn zwar $\lambda_1 = \lambda_2$, nicht aber $Var(e_1) = Var(e_2)$ gelten.

Gegeben seien vier Tests, die die Kenntnis von Vokabeln erfassen sollen. Die Tests A und B sind zwei kurze Test, die unter angenehmen Zeitbedingungen gegeben werden. C und D sind zwei längere Versionen, die aber unter Zeitdruck gegeben werden.

Jöreskog & Sörbom (1979)[7] betrachten die folgenden Hypothesen:

[7] Jöresog, K.G., Sörbom, D. (1979) Advances in factor analysis and structuralequations models. Cambridge, MA, Abt Books

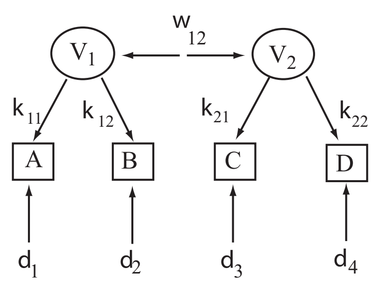
1. H_1: Die Tests A und B sind parallel, ebenso die Tests C und D. Alle vier Tests sind kongenerisch, d.h. es soll gelten $\lambda_{11} = \lambda_{12}$, und $\delta_1 = \delta_2$, sowie $\lambda_{21} = \lambda_{22}$ und $\delta_3 = \delta_4$. Weiter soll demnach $\varphi_{12} = 1$ gelten, d.h. $V_1 = V_2$ (bis auf eine mögliche Skalentransformation).

2. H_2: Sowohl A und B einerseits und B und C andererseits sind parallel, aber die beiden Paare sind nicht notwendig kongenerisch, d.h. es soll gelten $\lambda_{11} = \lambda_{12}$ und $\delta_1 = \delta_2$, und $\lambda_{21} = \lambda_{22}$ sowie $\delta_3 = \delta_4$.

3. H_3: Alle vier Tests sind kongenerisch, aber nicht notwendig parallel. Demnach soll lediglich $\varphi_{12} = 1$ gelten.

4. H_4: Einerseits sind A und B kongenerisch, andererseits ebenso B und D, aber die beiden Paare sind nicht kongenerisch (vergl. Abb. 7).

Abbildung 7: Parallele Tests, II



Diese Hypothesen bilden zwei hierarchische Serien: H_1, H_2 und H_4 einerseits, und H_1, H_3, H_4 andererseits. Innerhalb jeder Serie können χ^2-Vergleiche durchgeführt werden. Als Kovarianz-Matrix ergab sich Die Resultate, d.h. die Tests der Hypothesen, werden in der

Tabelle 4: Kovarianzen für die Tests

Test	A	B	C	D
A	86.40			
B	57.78	86.26		
C	56.67	59.32	97.28	
D	58.90	59.67	73.82	97.82

Tabelle 5 zusammengefasst: Demnach folgt

1. Hypothesen H_2 und H_4 mit den Daten kompatibel, nicht aber die Hypothesen H_1 und H_3.

2. Die nicht akzeptierbaren Hypothesen H_1 und H_3 enthalten die Annahme, daß alle vier Tests kongenerisch sind, während die akzeptierbaren Hypothesen H_2§ und H_4 diese Annahme nicht enhalten.

Tabelle 5: Ergebnisse der Hypothesentests

Modell	χ^2	df	p
H_1:	37.34	6	$< .01$
H_2:	1.93	5	.86
H_3:	36.22	2	$<.01$
H_4:	.70	1	.70
Modellvergleich	χ^2_{diff}	df	p
$H_2 - H_1$:	35.41	1	$<.01$
$H_4 - H_3$:	35.53	1	$<.01$
$H_3 - H_1$:	1.12	4	$>.80$
$H_4 - H_2$:	1.23	4	$>.80$

3. Die Vergleiche $H_2 - H_1$ und $H_4 - H_3$ beziehen sich auf Modelle, die äquivalent sind bis auf die Annahme, daß A und B kongenerisch mit C und D sind. Die ξ^2_{diff}-Werte zeigen, daß diese Annahme nicht haltbar ist.

4. Die Vergleiche $H_3 - H_1$ und $H_4 - H_2$ beziehen sich auf die Annahme, daß A und B parallel sind, und daß C und D parallel sind; diese Hypothesen können beibehalten werden.

Der Wert von φ wurde als $\hat{\varphi} = .9$ geschätzt. Demnach messen A und B einerseits und C, D andererseits nicht komplett dasselbe, d.h. der zeitliche Druck scheint eine neue Dimension zu implizieren, die aber für alle praktischen Zwecke vernachlässigbar ist. □

Beispiel 5 (Multitrait-multimethod Modelle:) Ziel dieser von Campbell & Fiske (1959)[8] eingeführten Modelle ist, die Unterschiede zwischen Messwerten (d.h. die Varianz), die auf psychologische Merkmale zurückzuführen ist, von den Unterschieden (ebenfalls die Varianz) zu trennen, die auf verschiedene Messmethoden zurückzuführen ist, zu trennen. Dazu wird jedes einer Reihe verschiedener Merkmale mit jeder untersuchten Methode gemessen. Die Ergebnisse werden in einer *Multitrait-Multimethod-Matrix* zusammengefasst, anhand der dann

- die *Konvergente Validität*, d.h. das Ausmaß, in dem verschiedene Methoden das gleiche Merkmal erfassen, und
- die *diskriminante Validität* d.h. die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Merkmalen zu unterscheiden,

bestimmt werden soll.

Bentler & McClain (1976)[9] haben bei 68 Mädchen der 5-ten Klasse 4 Merkmale mit 3 MEthoden gemessen. Die Merkmale waren Impulsivität, Extraversion, schulische Leistungsmotivation, und Testangst. Die Methoden waren Selbstratings, Ratings durch Lehrer und Ratings durch die jeweils anderen Mädchen ("Peer ratings"). Darin sind: E = Extraversion,

[8] Campbell, D.T., Fiske, D.W. (1959) Convergent and discriminant validation by the multitrait-multimethod matrix. Psychologicval Bulletin, 56, 61-96

[9] Bentler, P.M., McClain, J. (1976) A multitrait-multimethod analysis of reflection-impulsivity. Child Development, 47, 218-226

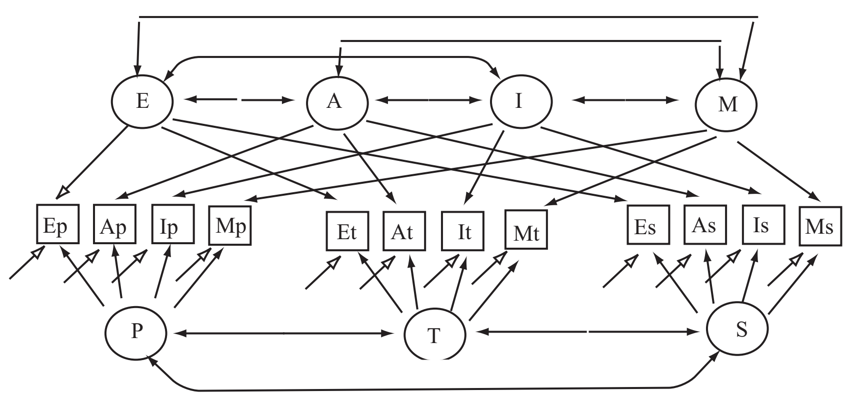
Tabelle 6: Multitrait-multimethod-Matrix der Korrelationen

	Ep	Ap	Ip	Mp	Et	At	It	Mt	Es	As	Is	Ms
Ep	1.00											
Ap	-.38	1.00										
Ip	.42	-.21	1.00									
Mp	-.25	.54	-.54	1.00								
Et	**.64**	-.15	.26	-.05	1.00							
At	-.29	**.66**	-.19	.44	-.25	1.00						
It	.38	-.09	**.56**	-.19	.59	-.14	1.00					
Mt	-.22	.51	-.33	**.66**	.06	.62	-.05	1.00				
Es	**.45**	-.05	.12	.10	**.50**	-.05	.36	.17	1.00			
As	.04	**.38**	-.03	.14	.08	**.30**	.09	.16	.02	1.00		
Is	.33	-.13	**.35**	-.18	.41	-.14	**.45**	-.13	.43	.16	1.00	
Ms	-.21	.37	-.44	**.58**	-.01	.41	-.10	**.62**	.06	.04	-.37	1.00

A = Testangst, I = Impulsivität, M = Motivation, p = Peer, t = Lehrer (teacher), s = Selbst.

Man kann die Matrix als aus Rechtecken aufgebaut betrachten. Die Rechtecke, in denen fett gedruckte Werte erscheinen, enthalten die Korrelationen zwischen den Merkmalen, so wie sie mit verschiedenen Methoden erfaßt wurden (*within-trait, cross-method*). Die fett gedruckten Zahlen sind Korrelationen zwischen den gleichen Merkmalen, die aber mit verschiedenen Methoden gemessen wurden. Man spricht auch von den *Validitätsdiagonalen.* Die Zahlen in Rechtecken ohne fett gedruckte Zahlen enthalten die Korrelationen zwischen den Merkmalen, so wie sie mit der entsprechenden Methode gemessen wurden (*within method, cross-trait correlations*). Hohe Werte in den Validitätsdiagonalen zeigen eine gute konvergen-

Abbildung 8: Multitrait-multimethod-Modell



te Validität an. Niedrige Werte außerhalb dieser Diagonalen zeigen eine gute diskriminante Validtät an, d.h. sie reflektieren die Verschiedenartigkeit der Merkmale. Sind die Within-method, cross-trait korrelationen größer als die cross-method, cross-trait-Korrelationen, so

Tabelle 7: Pfadmodell

	Ratings			
Merkmalsfaktor	Peer	Lehrer	Selbst	
Extraversion	.98	.62	.42	
Angst	.77	.91	.35	
Impulsivität	.78	.64	.42	
Motivation	.72	.89	.66	
	Traits			
Methodenfaktoren	E	A	I	M
Peer Ratings	.15	-.25	.32	-.68
Lehrer Ratings	.74	-.19	.49	.13
Selbst Ratings	.34	.17	.89	-.22
Trait-Faktor-Korrel.	E	A	I	M
Extraversion	1.00	-.35	.52	-.24
Angst		1.00	-.26	.74
Impulsivität			1.00	-.48
Motivation				1.00
	Methoden			
Meth.-Faktor-Korrel.	P	T	S	
Peer Ratings	1.00	.08	.04	
Lehrer Ratings		1.00	.32	
Selbst Ratings			1.00	

existiert eine *Methodenvarianz*, d.h. es existieren Assoziationen zwischen den Merkmalen, die nur auf die verwendete Messmethode zurückgehen.

Die fett gedruckten Werte in den Validitätsdiagonalen liegen zwischen .30 und .66 (Mittelwert .51), was als akzeptable konvergente Validität gewertet wird. Sie sind i.a. größer als die cross-trait, cross-method Korrelationen, so daß man ein gewisses MAß an diskriminanter Validität annehmen kann. Die Werte sind aber hinreichend groß, um die Hypothese vollständiger Unabhängigkeit skeptisch betrachten zu können,d.h. man kann vermuten, daß die Merkmale latente gemeinsame Merkmale erfassen. Die within-method, cross-trait Korrelationen sind etwas höher als die cross-method, cross-trait-Korrelationen, so daß man die Existenz von Methodenvarianz vermuten kann.

Die erste Teiltabelle (Merkmalsfaktor × Ratings) enthält relative hohe Korrelationen,d.h. es gibt einen Zusammenhang zwischen der Merkmalsausprägung einerseits und der verwendeten Methode; dies heißt, daß die verschiedenen Ratings das jeweilige Merkmal tatsächlich (einigermaßen) erfassen.

Die zweite Teiltabelle enthält die Korrelationen zwischen den Methoden und den (latenten) Traits. Die Messungen scheinen ungefähr in dem Maße durch die Methoden wie durch die Traits bestimmt zu sein (dritte Spalte der zweiten Tabelle, dritte Reihe der ersten Tabelle).

In der dritten Teiltabelle findet man die Korrelationen zwischen den Traits. Bemerkenswert ist die hohe Korrelation zwischen der Angst und der Motivation, sowie die zwischen

Extraversion und Impulsivität. Extraversion und Impulsivität sind andererseits negativ mit der Angst und der Motivation korreliert.

Man findet für das Modell $\chi^2 = 43.88$ bei $df = 35$; dieser Wert hat eine Wahrscheinlichkeit von $p > .1$, d.h. das Modell kann als mit den Daten kompatibel angesehen werden. $\square$

Im folgenden Beispiel geht es um die Frage, wie Liebe entsteht, bleibt oder vergeht. Diese Frage führt auf die Frage, wie zeitliche Abläufe im Rahmen von Strukturgleichungsmodellen modelliert werden können.

Beispiel 6 Kausales Liebesmodell: Tesser & Paulhus (1976)[10] gingen von der Annahme aus, daß das Denken an den/die Partner/in einen positiven Effekt auf die erlebte Attraktivität des/der Partner/in hat, und daß ebenso die Häufigkeit des Treffens (”dating”) einen solchen Effekt hat. Die Häufigkeit des Treffens habe außerdem einen positiven Effekt auf die ”reality constraints”, die ihrerseits einen negativen Effekt auf das Erlebnis von Liebe habe. Die ”reality constraints” sind dabei definiert als Wissen um den bzw. Erfahrungen mit jeweils anderen, das bzw. die inkonsistent mit den durch die eigenen Gedanken produzierten Erwartungen ist bzw. sind. Die LeserInnen dieses Skriptums mögen die zitierte Originalarbeit lesen, um zu einer vertiefenden Darstellung dieser nicht besonders überraschenden Annahmen zu gelangen. Hier ist von Interesse, daß man diese Annahmen mit einem einfachen Strukturgleichungsmodell überprüfen kann; die Autoren führen eine Pfadanalyse durch, deren Lektüre ebenfalls zu einem vertieften Verständnis der hier betrachteten Methodik führt.

Dem Ansatz der Autoren entsprechend erzeugen Gedanken (G_1) zum Zeitpunkt t_1 Liebe (L_2) zum Zeitpunkt t_2; Liebe (L_1) zum Zeitpunkt t_1 wirkt sich positiv auf die Gedanken (G_2) zum Zeitpunkt t_2 aus. Das Modell ist *rekursiv*, weil es keine Rückwirkungen $L_2 \to L_1$ und $G_2 \to G_1$ gibt. Analoge Aussagen gelten für die übrigen Variablen D_1 und D_2 (”dating” = Treffen) und C_1 und C_2 (reality constraints) zu den Zeitpunkten t_1 bzw. t_2).

Tesser et al. erhoben vier Variablen: Das Ausmaß, in dem ein Partner an den anderen während der letzten zwei Wochen dachte (G_1 und G_2); der Score war die Summe zweier Ratings: wie oft wurde an den/die PartnerIn gedacht (1 = gar nicht, 7 = oft) und wie lange (1 = gar nicht, 7 = sehr lang). Liebe (L_1, L_2) wurde als Score in einem Fragebogen mit insgesamt 9 Fragen erfaßt, ”reality constraints” (C_1, C_2) wurde mit der Frage. ”To the extent that you acquired any new information tend to confirm or contradict your expectations?” 1 entprach ”contradicted my expectation”, 7 = ”confirmed my expectation”. ”Dating” (D_1, D_2) wurde als Angabe über die Häufigkeit von Treffen in den letzten zwei Wochen operationalisiert. Nach der ersten Erhebung wurde die Personen zwei Wochen später noch einmal befragt. Die Tabelle 8 enthält die Korrelationen zwischen den vier ”Liebesmaßen”: Die Daten sind von Bentler & Huba (1979)[11] in bezug auf ein Strukturgleichungsmodell re-analysiert worden; Abb. 9 stellt das getestete Modell dar. Demnach lassen sich die vier Skalen als Funktion eines einzigen, gemeinsamen Faktors (latenten Dimension) ”Attraktion” darstellen; A_1 reflektiert diese Dimension zum ersten, A_2 zum zweiten Zeitpunkt. Es wird angenommen, daß das Messmodell für beide Zeitpunkte identisch ist. Das Ausmaß an Attraktion A_2 zum Zeitpunkt t_2 läßt sich durch das Ausmaß an Attraktion zum Zeitpunkt

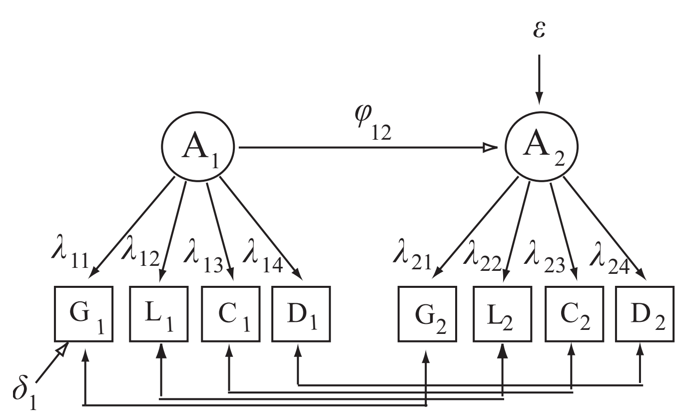
[10] Tesser A., Paulhus, D.L. (1976) Toward a causal model of love. Journal of Personality and Social Psychology, 34, 1095-1105

[11] Bentler, P.M., Huba, G.J. (1979) Simple minitheories of love. Journal of Personality and Social Psychology, 37, 124-130

Tabelle 8: Korrelationen zwischen den Liebesmaßen (Tesser & Paulhus (1976)

Zeitpunkt 1	G_1	L_1	C_1	D_1	G_2	L_2	C_2	D_1
Gedanken	1.000	.728	.129	.430	.741	.612	-.027	.464
Liebe		1.000	.224	.451	.748	.830	.094	.495
real. constr.			1.000	.086	.154	.279	.242	.104
Dating				1.000	.414	.404	.108	.806
Zeitpunkt 2								
Gedanken					1.000	.764	.161	.503
Liebe						1.000	.103	.505
real. constr.							1.000	.070
Dating								1.000
Mittelwert	.983	50.66	5.08	3.07	9.20	49.27	4.98	2.95
Stand'abw.	3.59	19.49	1.80	2.87	3.75	20.67	1.72	3.16

Abbildung 9: Theorie der Liebe



t_1 voraussagen; hinzu kommen neue Aspekte, die durch ϵ repräsentiert werden. Spezifische Aspekte des Verhaltens können über die zwei Zeitpunkte korreliert sein; dies wird durch die Pfeile, die G_1 mit G_2 etc. verbinden dargestellt. Z.B. können die "Dating"-Daten bei einer bestimmten Person durch spezifische Bedingungen, denen ein Paar unterliegt, bestimmt sein, die von der Attraktion unabhängig sind. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse: Ein zentrales Ergebnis ist der Wert $\varphi_{12} = .94$; Attraktivität erzeugt Attraktivität. "Gedanken" sowie der Liebesfragebogen sind gute Indikatoren für die Attraktivität A_1 und A_2, während "Dating" ein eher schwacher Indikator ist. Wenig indikativ für Attraktion ist das Maß für "reality constraints"; dieser Score wird durch andere Faktoren als die Attraktion bestimmt ($\delta_3 = .97$). Die Residualkovarianzen zeigen an, daß die Korrelationen zwischen den Messungen für "Gedanken" und "Liebe" im Wesentlichen durch den gemeinsamen Faktor Attraktion bestimmt werden, während die Scores für "Dating" durch spezifische Faktoren bestimmt zu sein scheinen. Dies ergibt sich aus dem Wert $\delta = .70$. Für das Modell ergibt sich $\chi^2 = 45.87$

Tabelle 9: Ergebnisse zum Liebesmodell

Variable	Pfad	Resid. Varianz	Resid. Kovarianz
Gedanken	$\lambda_{11} = \lambda_{21} = .83$	$\delta_1 = .31$	$\delta_{11} = .11$
Liebe	$\lambda_{12} = \lambda_{22} = .88$	$\delta_2 = .20$	$\delta_{22} = .09$
real. constr.	$\lambda_{13} = \lambda_{23} = .17$	$\delta_3 = .97$	$\delta_{33} = .21$
Dating	$\lambda_{14} = \lambda_{24} = .53$	$\delta_4 = .70$	$\delta_{44} = .21$
Attraktion	$\varphi_{12} = .94$	$\delta_5 = .15$	$\delta_{55} = .53$

bei $df = 22$; dieser Wert zeigt keinen besonders guten Fit für das Modell an. Die Werte in der Tabelle 9 sollten nicht überinterpretiert werden, da die Hypothese der multivariaten Normalverteilung wegen der Definition der empirischen Messwerte nicht notwendig korrekt ist. $\square$

Beispiel 7 Das Simplex-Wachstumsmodell: In vielen Evaluationsstudien soll das "Wachstum" einer Variablen über die Zeit bewertet werden, z.B. die Größe des Vokabulars im Sprachunterricht, die Größe von Schulkindern, oder die Resistenz gegenüber der Versuchung, wieder mit dem Rauchen anzufangen, etc. Man kann die Werte der "wachsenden" Variable über verschiedene Zeitpunkte korrelieren, also $x(t_1)$ mit $x(t_2)$, $x(t_3)$, $x(t_4)$, etc., dann $x(t_2)$ mit $x(t_3)$, $x(t_4)$ etc. Man wird dann im allgemeinen finden, daß die Größe der Korrelationen vom zeitlichen Abstand der Messwerte abhängt. Stellt man die Korrelationen in einer Matrix zusammen, so werden die Korrelationen in der Diagonalen, d.h. die $r(x(t_i), x(t_i))$, gleich 1 sein, und die Korrelationen $r(x(t_i), x(t_j))$ mit größer werdender Differenz zwischen t_i und t_j abnehmen, d.h. in der linken unteren und der rechten oberen Ecke der Matrix werden die Korrelationen am kleinsten sein. Korrelationsmatrizen, die diese Eigenschaft haben, werden nach Guttman (1954)[12] *Simplex* genannt. Die Tabelle 10 enthält die Korrelationen zwischen Maßen[13] für "Academic Achievement" für 7 "Grades":

Tabelle 10: Korrelationen zwischen Messungen für "Academic Achievement"

	Grades						
Grade	1	2	3	4	5	6	7
1	1.00	.73	.74	.72	.68	.68	. 66
2		1.00	.86	.79	.78	.76	.74
3			1.00	.87	.86	.84	.81
4				1.00	.93	.91	.87
5					1.00	.93	.90
6						1.00	.94
7							1.00

[12]Guttman, L. (1954) A new approach to factor analysis: The radex. In: Lazarsfeld, P.F. (ed.) Mathematical Thinking in the Social Sciences, Glencoe, Ill., Free Press, p. 258-348

[13]Bracht, G.H., Hopkins, K.D. (1972) Stabilitys of educational achievement. In: Bracht, G.H., Hopkins, K.D.: Perspectives in educational and psychological measurement, Englewood Cliffs, New York, Prenticve Hall, p. 254-258

Werts, Linn und Jöreskog (1977) haben ein Modell für diese Daten vorgeschlagen[14]. Dem Ansatz dieser Autoren zufolge wird für eine Messung y_i zum Zeitpunkt t_i die Gleichung

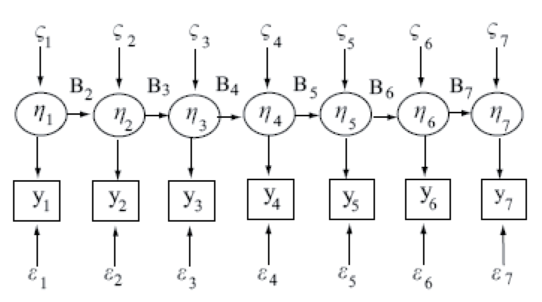
$$y_i = \eta_i + \epsilon_i \tag{64}$$

angenommen, wobei η_i die wahren Werte und die ϵ_i von η_i unabhängige, unkorrelierte Fehler sind. Für die wahren Werte wird eine Simplexstruktur angenommen, die in der Gleichung

$$\eta_{i+1} = B_i \eta_i + \zeta_{i+1} \tag{65}$$

definiert wird. Hierin sind die Größen ζ_i unabhängig voneinander, und die Matrix B enthält die wahren Regressionskoeffizienten. Es läßt sich zeigen, daß die Partialkorrelationen zwi-

Abbildung 10: Simplexmodell des Wachstums



schen η_i und η_{i+2} alle gleich Null sind, wenn (65) gilt (damit stellt die Gleichung (65) eine Beziehung zu den Markoff-Prozessen her). Es wird angenommen, daß die Messungen alle in bezug auf die gleichen Einheiten vorgenommen werden. Die Differenz Δ_i

$$\Delta_i = \eta_{i+1} - \eta_i \tag{66}$$

zwischen zwei aufeinander folgenden Werten η_i und η_{i+1} führt zu

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \Delta_i. \tag{67}$$

Zusammen mit der Gleichung (65) führt dies zu der Beziehung

$$\Delta_i = (B_i - 1)\eta_i + \zeta_{i+1}. \tag{68}$$

Wert et al. gehen nun von dem allgemeinen Ansatz

$$B\eta = \Gamma\xi + \zeta \tag{69}$$

aus, wobei B eine $(m \times m)$-Matrix und Γ eine $(m \times n)$-Matrix ist. $\eta = (\eta - 1, \ldots, \eta_m)'$ ist der Vektor der wahren abhängigen Variablen, und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)'$ ist der Vektor der wahren unabhängigen Variablen. $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)'$ ist ein Vektor von Residuen (Fehlern, zufällige Störungen,etc.). ξ und ζ werden als unkorreliert angenommen. η und ξ werden nicht direkt

[14] Werts, C.E., Linn, R.L., Jöresog, K.G. (1977) A simplex model for analyzing academic growth. *Educational and Psychological Measurement*, 37, 745-756

beobachtet. Statt dessen werden die Variablen x und y gemessen; das Messmodell ist wieder durch

$$y = \mu + \Lambda_y \eta + \epsilon \tag{70}$$
$$x = \nu + \Lambda_x \xi + \delta \tag{71}$$

gegeben. Hierin ist $\mu = E(y)$, $\nu = E(x)$ und ϵ, δ sind Messfehler in den x und y. Λ_y und Λ_x sind $(p \times m)$- und $(q \times n)$-Matrizen von Regressionsgewichten für die Regression von y auf η und x auf ξ. Mit Φ wird die $(n \times n)$-Varianz-Kovarianz-Matrix der Komponenten von ξ, und mit Ψ die $(m \times m)$-Varianz-Kovarianz-Matrix der Komponenten von ζ bezeichnet, Θ_ϵ^2 und Θ_δ^2 sind die Diagonalmatrizen der Fehlervarianzen von y und x. Für die Varianz-Kovarianz-Matrix für die Komponenten des Vektors $z = (y', x')'$ erhält man

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Lambda_y(B^{-1}\Gamma\Phi\Gamma' B'^{-1} + B^{-1}\Psi B'^{-1})\Lambda_y' + \Theta_\epsilon^2, & \Lambda_y B^{-1}\Gamma\Phi\Lambda_x' \\ \Lambda_x \Phi\Gamma' B'^{-1}\Lambda_y', & \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta^2 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Für die Bracht et al.-Daten ist $y = (y_1, y_2, \ldots, y_7)'$ der Vektor der beobachteten Werte, $\epsilon = /\epsilon_1, \ldots, \epsilon_7)'$ sind die Messfehler, und die wahren Werte sind durch $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_7)'$ gegeben. $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_7)'$ enthält die Regressionsresiduen. Λ_y ist durch eine (7×7)-Identitätsmatrix gegeben, und B ist durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_7 & 1 \end{pmatrix} \tag{73}$$

gegeben. Die Varianz-Kovarianz-Matrix Ψ wird als Diagonalmatrix mit den Diagonalzellen gleich V_{ζ_i} angesetzt, und die Varianzen der ϵ_i sind durch $\Theta_\epsilon = (V_{\epsilon_1}, \ldots, V_{\epsilon_8})$ gegeben. Die

Tabelle 11: Varianz-Kovarianz-Matrix für die wahren Werte η_i

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7
η_1	.184						
η_2	.257	.400					
η_3	.338	-.527	.743				
η_4	.357	.555	.783	.962			
η_5	.418	.650	.917	1.127	1.372		
η_6	.428	.667	.940	1.156	1.407	1.548	
η_7	.452	.703	.992	1.219	1.484	1.635	1.865

Varianz-Kovarianz-Matrix für die η_i wird in Tabelle 11 angegeben. Tabelle 12 enthält die Schtäzungen der übrigen relevanten Parameter. Dem ξ^2- und dem entsprechenden p-Wert zufolge ist das Modell mit den Daten kompatibel. Die Varianz η_i^2 der akademischen Leistung wächst mit dem Grade. Darüber hinaus fällt auf, daß die B_i-Werte größer als 1 sind. Die B_i-Werte repräsentieren den Effekt einer Leistung auf die folgende. Die Vermutung der Autoren

Tabelle 12: Ergebnisse der Parameterschätzung; $\chi^2 = 10.76$, $df = 10$, $p > .30$.

Grade	B	Ψ	η_i^2	Θ_ϵ^2
1			.184	.076
2	1.398	.041	.400	.76
3	1.318	.049	.743	.049
4	1.054	.137	.962	.058
5	1.172	.051	1.372	.068
6	1.026	.104	1.548	.040
7	1.056	.138	1.864	.040

ist, daß diejenigen Studierenden, die schon viel wissen, im folgenden Jahr noch mehr wissen, und die, die wenig wissen, im folgenden Jahr relativ noch weniger wissen (diese Vermutung muß allerdings anhand weiterer Daten überprüft werden). □